Cendekia: Jurnal Ilmiah Multidisiplin
Volume 1, No. 1, 2024, Hal 1-4
ISSN xxxx-xxxx (media online)

Menentukan Nilai Rata-rata Menggunakan Teorema Rolle

Suzila[1], Zulfah[2], Astuti[3], Kasman Ediputra[4]
[1, 2, 3, 4] Pendidikan Matematika, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai, Indonesia

✉ corresponding author
sumayyahazzahro01@gmail.com

Abstrak

Kalkulus diferensial adalah salah satu cabang kalkulus dalam matematika yang mempelajari bagaimana nilai suatu fungsi berubah menurut perubahan input nilainya. Fungsi satu variabel real dapat mencapai nilai maksimum atau minimum di titik tertentu pada selang terbuka, ditandai dengan turunan pertama fungsi tersebut sama dengan nol. Sehingga garis singgung di titik ekstrim relatif fungsi tersebut mendatar atau sejajar dengan sumbu x. Tujuan dari pembuatan artikel ini yaitu untuk mencari titik ekstrim relatif menggunakan teorema rolle yang memastikan adanya garis singgung yang mendatar di grafik fungsi terdiferensialkan.

Kata kunci: Teorema Rolle, kalkulus, turunan,

Abstract

Differential calculus is a branch of calculus in mathematics that studies how the value of a function changes according to changes in the input value. A function of one variable can reach a maximum or minimum value at a certain point on an open interval, indicated by the first derivative of the function being equal to zero. So that the tangent line at the relative extreme point of the function is horizontal or parallel to the x axis. The purpose of the this article is to find relative extreme points using the rolle's theorem which unsures that there is a horizontal tangent line in the graph of the differentiable function.

Keywords: Rolle's theorem, calculus, derivative

PENDAHULUAN

Kalkulus adalah ilmu mengenai perubahan kalkulus memiliki dua cabang utama, kalkulus diferensial dan kalkulus integral yang saling berhubungan melalui teorema dasar kalkulus. Pelajaran kalkulus adalah pintu gerbang menuju pelajaran matematika lainnya yang lebih tinggi, yang khusus mempelajari fungsi dan limit, yang secara umum dinamakan analisis matematika. Kalkulus diferensial adalah salah satu cabang kalkulus dalam matematika yang mempelajari bagaimana nilai suatu fungsi berubah menurut perubahan input nilainya. Topik utama dalam pembelajaran kalkulus diferensial adalah turunan dari suatu fungsi pada titik tertentu menjelaskan sifat-sifat fungsi yang mendekati inilah input untuk fungsi yang bernilai dengan variabel tunggal, turunan pada sebuah titik sama dengan kemiringan dari garis singgung grafik fungsi yang pada titik tersebut. Secara umum, turunan suatu fungsi pada sebuah titik menentukan pendekatan linear terbaik fungsi pada titik tersebut.

Dalam kalkulus diferensial telah dipelajari bahwa satu fungsi variabel real f yang kontinu pada suatu selang dapat mencapai nilai maksimum atau minimum di titik (a, f(a)) pada selang buka (a – r, a + r) untuk suatu r > 0, dimana selang buka (a – r, a+ r) terletak pada daerah definisi fungsi f. Dalam hal ini dikatakan bahwa fungsi mencapai ekstrim relatif (lokal) di x = a. Konsep ini dikenal sebagai relatif dari fungsi satu variabal real, yang lokasinya dapat ditentukan dengan uji turunan pertama atau uji turunan kedua. Secara umum, suatu fungsi relatif yang terdefinisi pada suatu selang dapat mencapai ekstrim relatif pada tersebut. Masalah yang muncul adalah dimanakah lokasi ekstrim relatif mesti dicari. Bila diperhatikan bahwa suatu ciri ekstrim relatif dan fungsi yang terdiferensialkan adalah turunan pertama di titik ekstrim itu sama dengan nol. Dengan

ISSN xxxx-xxxx (media online)

Perkataan lain, garis singgung di titik ekstrim relatif mendatar atau sejajar dengan sumbu x. Kemudian muncul lagi permasalahan, lihat apakah yang menjamin adanya garis singgung yang mendatar di suatu titik ada grafik fungsi yang terdiferensialkan? yaitu melalui Teorema Rolle. Oleh karena itu, penulis menggambil judul "Teorema Rolle".

METODE

Untuk menyelesaikan permasalahan dalam contoh soal yang terdapat di dalam artikel ini, penulis menggunakan metode studi kepustakaan, konsultasi kepada dosen pembimbing dan bantuan dari dosen pengampu yang mengampu mata kuliah Metode Numerik.

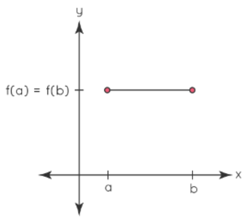
HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam kalkulus, teorema *Rolle* menyatakan bahwa jika suatu fungsi terdiferensiasi (bernilai riil) mencapai nilai yang sama pada dua titik yang berbeda, maka fungsi tersebut harus memiliki setidaknya satu titik tetap di antara keduanya, di mana turunan pertama adalah nol. Teorema *Rolle* dinamai menurut Michel Rolle, seorang matematikawan Prancis. Teorema *Rolle* merupakan kasus khusus dari teorema nilai rata-rata. Jika suatu kurva beraturan meninggalkan dan tiba pada ketinggian yang sama, pada suatu titik ia akan mempunyai garis singgung horizontal. Jika fungsi mulai naik, maka fungsi tersebut harus turun untuk mencari nilai awalnya. Antara naik dan turun, ada titik di mana fungsi mencapai maksimum, dan pada titik ini f' dibatalkan. Hal yang sama terjadi jika fungsinya mulai turun, dan f' bernilai nol pada nilai minimum f.

Teorema Rolle:
Misalkan fungsi f kontinu pada $[a,b]$, terdiferensialkan pada (a,b), dan $f(a) = f(b)$. Maka terdapat suatu $c \in (a,b)$ sehingga $f'(c) = 0$.

Pembuktian teorema rolle :
Kasus 1: Fungsinya konstan

Dalam kasus f fungsi konstan pada $[a,b], f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, sehingga setiap titik memenuhi Teorema Rolle karena fungsi f kontinu pada $[a,b]$, maka terdapat $m, M \in \boldsymbol{R}$ sehingga
$m = \min_{a \le x \le b} f(x) \le f(x) \le \operatorname{maks}_{a \le x \le b} f(x) = M.$
Untuk fungsi konstan , grafiknya berupa segmen garis horizontal.



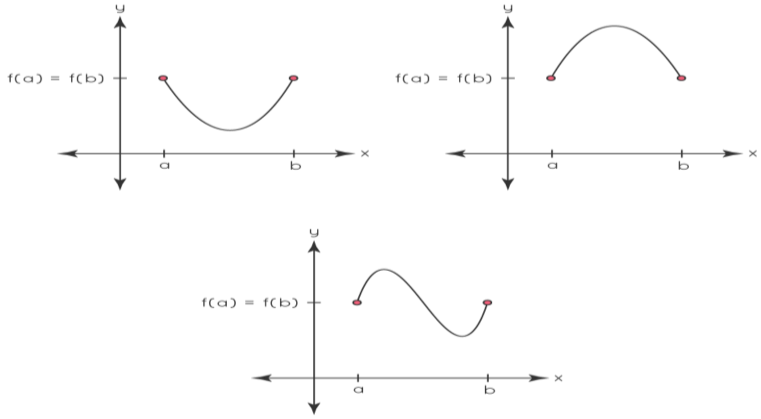
(Ingat, Teorema Rolle menjamin setidaknya satu titik. Teorema ini tidak menghalangi beberapa titik)

Kasus 2: fungsinya tidak konstan

Dalam kasus f fungsi konstan pada $f(a) = f(b)$, maka nilai minimum atau maksimum fungsinya tidak mungkin tercapai di titik ujung a dan b. Berdasarkan Teorema Nilai Antara untuk fungsi kontinu dimana M suatu bilangan diantara $f(a)$ dan $f(b)$, maka terdapat bilangan c diantara (a,b) sehingga $f(c) = M$ atau $m = f(c)$. Karena fungsi f terdiferensialkan pada (a,b), maka $f_-'(c) = f_+'(c) = f'(c)$. Hal ini mengakibatkan:
$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-M}{x-c} \ge 0$, karena $f(x) - M \le 0$ dan $c < 0$.
Nilai maksimum tidak mungkin terjadi pada titik di mana $f'(x) < 0$, karena jika $f'(x) < 0$ maka fungsi tersebut menurun, yang berarti fungsi tersebut lebih besar sedikit ke kiri dari posisi sekarang.

Cendekia: Jurnal Ilmiah Multidisiplin ISSN xxxx-xxxx (media online)
Volume 1, No. 1, 2024, Hal 1-4

$f'(x) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, karena $f(x) - M \leq 0$ dan $c > 0$.
Nilai maksimum tidak mungkin terjadi pada titik di mana $f'(x) > 0$, karena jika $f'(x) > 0$ maka fungsinya meningkat. Namun, fungsinya tidak dapat meningkat karena berada pada titik maksimumnya.
Karena fungsi tersebut tidak konstan, maka arahnya harus berubah agar dapat dimulai dan diakhiri pada nilai y yang sama. Artinya, pada suatu titik dalam interval, fungsi tersebut akan memiliki nilai minimum, nilai maksimum, atau keduanya. Jadi, dikarenakan f'(x) ada, tetapi tidak lebih besar dari nol, dan tidak lebih kecil dari nol, maka diperoleh $f'(c) = 0$. Dan telah ditunjukkan bahwa fungsi tersebut harus memiliki ekstrem dan pada ekstrem tersebut turunannya harus sama dengan nol.



Contoh soal:

Verifikasikan teorema rolle untuk fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 8$ pada interval $[-1,3]$.

Penyelesaian :

a) Buktikan $f(x)$ kontinu terhadap $[a, b]$
$f(x) = x^2 - 2x - 8$ (terbukti)
$f(-1) = \lim_{h \to -1} (-1)^2 - 2(-1) - 8 = -5$
$f(3) = \lim_{h \to -1} (3)^2 - 2(3) - 8 = -5$

b) $f'(x)$
$f(x) = x^2 - 2x - 8$
$f'(x) = 2x - 2$ (terbukti)

c) $f(a) = f(b)$
$f(a) = x^2 - 2x - 8$
$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 8$
$f(-1) = -5$

$f(b) = x^2 - 2x - 8$
$f(3) = (3)^2 - 2(3) - 8$
$f(3) = -5$ (terbukti)

d) $f'(c) = 0$
$f(x) = x^2 - 2x - 8$
$f'(x) = 2x - 2 = 0$
$2x - 2 + 2 = 0 + 2$ kedua ruas ditambah 2
$2x = 2$ kedua ruas dikali $\frac{1}{2}$
$x = 1$
Maka, terbukti $c = 1$.

ISSN xxxx-xxxx (media online)

KESIMPULAN

Teorema rolle berlaku untuk fungsi kontinu pada interval tertutup, dimana nilai fungsi pada titik ujungnya sama. Teorema ini menjamin keberadaan setidaknya satu titik dalam interval dimana turunannya sama dengan nol.

UCAPAN TERIMA KASIH

Keberhasilan dalam penyususnan artikel ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah banyak membantu yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

DAFTAR PUSTAKA

Acevedo, A. E. E. (2014). *UNA VERSIÓN DEL TEOREMA DE ROLLE PARA FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA*. UNIVERSIDAD NACIONAL DE TRUJILLO.

Pérez, E.-C. (2009). Una nota sobre el Teorema de Rolle. *Miscelánea Matemática*, *50*, 89–94. http://miscelaneamatematica.org/Misc50/5007.pdf

Suárez Alemán, C. O. (2011). Orígenes y Evolución del Teorema de Rolle. *Epsilon - Revista de Educación Matemática*, *28*(1), 39–50.