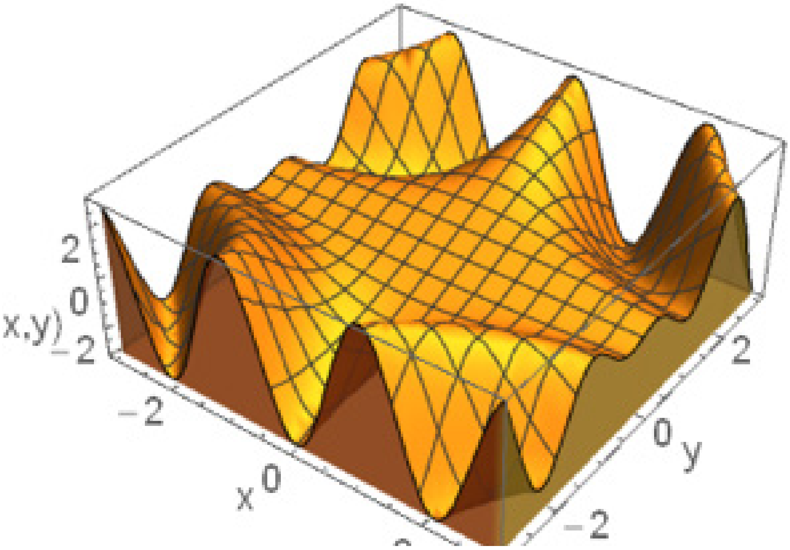
Kalkulus II

R. Joko Musridho



Kalkulus II
2021, R. Joko Musridho

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI		**ix**
BAB I	FUNGSI LOGARITMA ASLI	1
	A. Pendahuluan	3
	B. Penyajian Materi	3
	C. Latihan	14
	D. Tugas	15
BAB II	FUNGSI BALIKAN (INVERS) DAN TURUNANNYA	17
	A. Pendahuluan	19
	B. Penyajian Materi	19
	B.1. Fungsi Invers	19
	B.2. Turunan dari Fungsi Invers	25
	C. Latihan	31
	D. Tugas	32
BAB III	FUNGSI EKSPONEN	33
	A. Pendahuluan	35
	B. Penyajian Materi	35
	B.1. Sifat-sifat Fungsi Eksponen	35
	B.2. Persamaan Eksponen	38
	C. Latihan	43
	D. Tugas	43
BAB IV	FUNGSI TRIGONOMETRI INVERS	45
	A. Pendahuluan	47
	B. Penyajian Materi	47
	C. Latihan	53
	D. Tugas	54
BAB V	INTEGRAL DENGAN SUBSTITUSI	55
	A. Pendahuluan	57
	B. Penyajian Materi	57
	B.1. Substitusi Dalam Integral Tak-Tentu	57
	B.2. Substitusi Dalam Integral Tentu	64
	C. Latihan	71
	D. Tugas	72

BAB VI INTEGRAL TRIGONOMETRI 73
A. Pendahuluan 75
B. Penyajian Materi 75
C. Latihan 95
D. Tugas 96

BAB VII PENGINTEGRALAN PARSIAL 97
A. Pendahuluan 99
B. Penyajian Materi 99
C. Latihan 108
D. Tugas 108

BAB VIII PENGINTEGRALAN FUNGSI RASIONAL 109
A. Pendahuluan 111
B. Penyajian Materi 111
C. Latihan 119
D. Tugas 120

BAB IX LIMIT FUNGSI BENTUK TAK TENTU YANG LAIN 121
A. Pendahuluan 123
B. Penyajian Materi 123
C. Latihan 140
D. Tugas 141

BAB X INTEGRAL TAK WAJAR : BATAS TAK TERHINGGA 143
A. Pendahuluan 145
B. Penyajian Materi 145
C. Latihan 155
D. Tugas 155

BAB XI INTEGRAL TAK WAJAR : INTEGRAL TAK TERHINGGA 157
A. Pendahuluan 159
B. Penyajian Materi 159
C. Latihan 169
D. Tugas 170

DAFTAR PUSTAKA 173

BAB I

FUNGSI LOGARITMA ASLI

BAB I. FUNGSI LOGARITMA ASLI

A. PENDAHULUAN

Pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami fungsi logaritma asli yang merupakan bagian dari fungsi transenden.
2. Memahami fungsi logaritma asli yang berfungsi untuk menentukan turunan dari fungsi logaritma natural dan fungsi variannya
3. Mampu menentukan integral tak tentu dari fungsi logaritma asli dan variannya serta menurunkan fungsi secara logaritmik.

B. PENYAJIAN MATERI

Sekarang kita perhatikan adanya kesenjangan dalam penyelesaian turunan dari fungsi berikut ini:

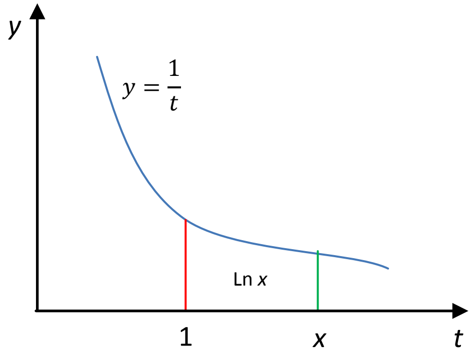
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) = x^3$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x^1$$
$$\frac{d}{dx}(x) = x^0$$
$$\frac{d}{dx}(\,???\,) = x^{-1}$$
$$\frac{d}{dx}(-x^{-1}) = x^{-2}$$
$$\frac{d}{dx}(-x^{-2}) = x^{-3}$$

Dari permasalahan di atas dapat dilihat bahwa turunan dari fungsi berapa yang menghasilkan $\frac{1}{x}$?

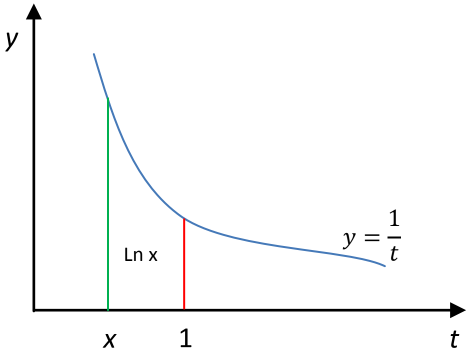
Hal ini dapat diselesaikan dengan teorema kalkulus dimana fungsi logaritma asli yang biasanya disebut juga dengan fungsi logaritma natural atau sering dilambangkan dengan *"ln"*, yaitu:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,, \qquad x > 0$$

Daerah asalnya adalah himpunan rill positif, secara geometri luas *"ln x "* dapat diperlihatkan pada gambar berikut ini.



Gambar 1.1 Jika x > 1, hasil *ln x* = positif



Gambar 1.2 Jika x < 1, maka hasil *ln x* = negatif

Maka nilai *ln x* menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = \frac{1}{t}$, dimana $1 \leq t \leq x$. Oleh karena itu maka dapat dituliskan bahwa :

$$\ln x < 0 \qquad \text{Jika } 0 < x < 1$$
$$\ln x = 0 \qquad \text{Jika } x = 1$$
$$\ln x > 0 \qquad \text{Jika } x > 1$$

Turunan dari *ln x*

Menurut teorema dasar kalkulus, bahwa :

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

Dengan menggunakan aturan rantai, andaikan *u*= *f(x)*> *0* maka apabila *f* dapat dideferensialkan, maka :

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}(u)$$

Contoh :

1. Tentukan $\frac{d}{dx}\ln(x^2)$

   Jawab :

   $$\frac{d}{dx}\ln(x^2)$$
   $$= \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}(x^2)$$
   $$= \frac{1}{x^2}(2x)$$
   $$= \frac{2x}{x^2}$$
   $$= \frac{2}{x}$$

2. Tentukan $\frac{d}{dx}\ln|x|$

   Jawab :

   Penyelesaiannya ada dengan 2 cara yaitu :

   Apabila x > 0, |x| = x

   $$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x$$

$$= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x)$$
$$= \frac{1}{x}(1)$$
$$= \frac{1}{x}$$

Apabila x > 0, |x| = - x

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x)$$
$$= \frac{1}{-x}\frac{d}{dx}(-x)$$
$$= \frac{1}{-x}(-1)$$
$$= \frac{-1}{-x}$$
$$= \frac{1}{x}$$

3. Tentukan $\frac{d}{dx}\ln 2x$

   Jawab :

$$\frac{d}{dx}\ln 2x$$
$$= \frac{1}{2x}\left(\frac{d}{dx}2x\right)$$
$$= \frac{1}{2x}(2)$$
$$= \frac{2}{2x}$$
$$= \frac{1}{x}$$

4. Tentukan $\frac{d}{dx}\ln\sqrt{2x}$

   Jawab :

$$\frac{d}{dx}\ln\sqrt{2x}$$

$$= \frac{d}{dx} \ln(2x)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{(2x)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left((2x)^{1/2}\right)$$
$$= \frac{1}{(2x)^{1/2}} \left[\frac{2}{1/2} x^{\frac{1}{2}-1}\right]$$
$$= \frac{1}{(2x)^{1/2}} \left[2(2)x^{-\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{1}{(2x)^{1/2}} \left[4x^{-\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{1}{(2x)^{1/2}} \left[\frac{4}{x^{1/2}}\right]$$
$$= \frac{4}{2x}$$

Integral Tak Tentu dari 1/u

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

Contoh :

5. Tentukan $\int \frac{dx}{x+1}$

   Jawab :

   Misal :
   $$u = x + 1$$
   $$\frac{du}{dx} = 1$$
   $$du = dx$$

   Maka :
   $$\int \frac{dx}{x+1}$$
   $$= \int \frac{du}{u}$$
   $$= \int \frac{1}{u} du$$
   $$= \ln|u| + C$$

$= \ln|x + 1| + C$

6. Tentukan $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

   Jawab :

   Misal :

   $u = x^2 + 1$

   $\frac{du}{dx} = 2x$

   $du = 2x\ dx$

   $\frac{du}{2} = x\ dx$

   $\frac{1}{2} du = x\ dx$

   Maka :

   $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

   $= \int \frac{1}{x^2 + 1} (x\ dx)$

   $= \int \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} du\right)$

   $= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$

   $= \frac{1}{2} \ln|u| + C$

   $= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C$

   Contoh penyelesaian soal integral tentu logaritma natural.

7. Tentukan $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

   Jawab :

   Misal :

   $u = x^2 + 1$

   $\frac{du}{dx} = 2x$

   $du = 2x\ dx$

$$\frac{du}{2} = x\ dx$$
$$\frac{1}{2}du = x\ dx$$

Maka :

$$= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}(x\ dx)$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{u}\left(\frac{1}{2}du\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{u} du$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{2}\ln|1^2+1|\right) - \left(\frac{1}{2}\ln|0^2+1|\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\ln 2\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 1\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\ln 2\right) - 0$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2$$

Teorema Dasar Logaritma Natural (Sifat-sifat Logaritma)

- ln 1 = 0
- ln $a.b$ = ln a + ln b
- ln a/b = ln a – ln b
- ln a^r = r ln a

Pembuktian sifat-sifat logaritama di atas:

$y = \ln ax$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax)$

$= \frac{1}{ax}(a)$

$= \frac{a}{ax}$

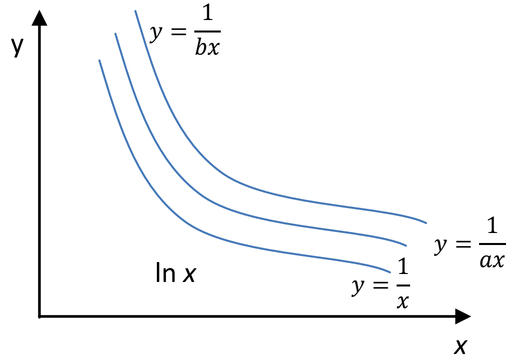
$= \frac{1}{x}$

Berarti dapat kita simpulkan bahwa :

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Dan juga

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}$$



Gambar 1.3. Grafik fungsi untuk luas dibawah kurva

Dari gambar 1.3 dapat kita perhatikan bahwa untuk luas kurva di bawah fungsi $y = \frac{1}{x}$ adalah *ln x*. Sedangkan untuk luas kurva di bawah fungsi $y = \frac{1}{ax}$ adalah $\ln ax$. Begitu juga untuk luas kurva di bawah fungsi $y = \frac{1}{bx}$ adalah $\ln bx$.

Jadi, untuk memperoleh luas dibawah kurva adalah :

$$\ln ax = \ln x + C$$

Pada saat :

$$x = 1$$

Maka :

$$\ln ax = \ln x + C$$
$$\ln a(1) = \ln 1 + C$$
$$\ln a = 0 + C$$
$$\ln a = C$$
$$C = \ln a$$

Kalau begitu dapat disimpulkan bahwa :

$$\ln ax = \ln x + C$$
$$\ln ax = \ln x + \ln a$$
$$\ln ax = \ln a + \ln x$$

Sehingga terbukti teorema di atas :

$$\ln a.b = \ln a + \ln b$$

Contoh :

8. Tentukan turunan dari fungsi logaritma berikut :

$$y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

Jawab :

Untuk menyelesaikannya maka kita harus menyederhanakan fungsi tersebut menggunakan teorema dasar yang di atas.

Pertama sederhanakan menggunakan teorema poin ke-4.

$y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$$y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Selanjutnya sederhanakan kembali menggunakan teorema poin ke-3, yaitu :

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}[\ln(x-1) - \ln(x+1)]$$
$$y = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

Selanjutnya baru kita selesaikan turunannya.

- $\frac{d}{dx}\ln(x-1) = \frac{1}{(x-1)}\frac{d}{dx}(x-1)$
  $= \dfrac{1}{(x-1)}(1) = \dfrac{1}{(x-1)}$
- $\frac{d}{dx}\ln(x+1) = \frac{1}{(x+1)}\frac{d}{dx}(x+1)$
  $= \dfrac{1}{(x+1)}(1) = \dfrac{1}{(x+1)}$

Maka :

$$y = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+1)}\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x-2)} - \frac{1}{(2x+2)}$$
$$\frac{dy}{dx} = \left\{\left[\frac{1}{(2x-2)}\right]\left[\frac{2x+2}{2x+2}\right]\right\} - \left\{\left[\frac{1}{(2x+2)}\right]\left[\frac{2x-2}{2x-2}\right]\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x+2) - (2x-2)}{4x^2 + 4x - 4x - 4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2 - 2x + 2}{4x^2 - 4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2x + 2 + 2}{4x^2 - 4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{4x^2 - 4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Turunan dari Fungsi Logaritmik

Definisi dari logaritmik adalah fungsi yang berhubungan atau berpaut degan logaritma, sehingga persamaan yang rumit dari sebuah fungsi maka dapat di selesaikan penurunannya menggunakan teorema logaritma natural.

Contoh :

9. Tentukan turunan $\left({}^{dy}/_{dx}\right)$ dari $y = \frac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}$

   Jawab :

   Untuk menyelesaikan turunan dari fungsi di atas akan rumit dan panjang, akan tetapi akan memudahkan kalau kita menyelesaikannya menggunakan *"ln"*.

   Jadikan fungsi diatas menjadi fungsi logaritma natural, yaitu :

   $$y = \frac{x + 11}{\sqrt{x^3 - 4}}$$

   $$\ln y = \frac{\ln(x + 11)}{\ln\left(\sqrt{x^3 - 4}\right)}$$

   $$\ln y = \ln(x + 11) - \ln\left(\sqrt{x^3 - 4}\right)$$

   $$\ln y = \ln(x + 11) - \ln(x^3 - 4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y = \ln(x+11) - \frac{1}{2}\ln(x^3-4)$$
$$\frac{1}{y}\frac{d}{dx}(y) = \frac{1}{(x+11)}\frac{d}{dx}(x+11) - \frac{1}{2}\frac{1}{(x^3-4)}\frac{d}{dx}(x^3-4)$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+11)}(1) - \frac{1}{2}\frac{1}{(x^3-4)}(3x^2)$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+11)} - \frac{1}{2}\frac{3x^2}{(x^3-4)}$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+11)} - \frac{3x^2}{2(x^3-4)}$$
$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{(x+11)} - \frac{3x^2}{2(x^3-4)}\right)(y)$$
$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{(x+11)} - \frac{3x^2}{2(x^3-4)}\right)\left(\frac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}\right)$$

C. LATIHAN

1. Tentukan $\frac{d}{dx}\ln\sqrt{x}$

   Kunci jawaban :

   $\frac{1}{2x}$

2. Tentukan $\frac{d}{dx}\ln(x^2-x-2)$

   Kunci jawaban :

   $\frac{2x-1}{x^2-x-2}$

3. Tentukan $\frac{d}{dx}\ln(2x+5)$

   Kunci jawaban :

   $\frac{2}{2x+5}$

4. Tentukan $\int \frac{5}{2x+7}\,dx$

   Kunci jawaban :

   $= \frac{5}{2}\ln|2x+7| + C$

5. Hitunglah

$$\int_{-1}^{3} \frac{x}{10 - x^2}\, dx$$

Kunci jawaban :

$$= \frac{1}{2} \ln 9$$

D. TUGAS

Tentukan turunan-turunan yang ditunjukkan pada masing-masing soal dibawah ini.

1. $\frac{d}{dx} \ln(x^2 - 5x + 6)$
2. $\frac{d}{dx} \ln(2x^3 + 1)$
3. $\frac{d}{dx} \ln \sqrt{3x - 25}$

Hitunglah integral berikut :

4. $\int \frac{4}{2x+1} dx$
5. $\int_0^3 \frac{x^3}{x^4+1} dx$

BAB II

FUNGSI BALIKAN (INVERS) DAN TURUNANNYA

BAB II. FUNGSI BALIKAN (INVERS) DAN TURUNANNYA

A. PENDAHULUAN

Pembahasan pada bab ini adalah mengenai fungsi invers dan turunannya dimana cara ini merupakan salah satu cara untuk menambah dari fungsi-fungsi yang ada. Selama ini kita sangat sulit untuk mencari turunan suatu fungsi yang semakin banyak sehingga kita harus memikirkan bagaimana mencari turunannya apakah menghitung dengan cara yang cukup panjang? Apakah ada cara yang lebih mudah dan cepat untuk menghitung turunannya.

Pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

- Mengetahui tentang fungsi invers atau balikan.
- Mengetahui cara menentukan suatu fungsi invers dan turunannya.
- Mengetahui setiap fungsi yang monoton murni pada daerah asalnya pasti mempunyai invers
- Mengetahui cara mencari turunan dari fungsi inervs.

B. PENYAJIAN MATERI

B.1. Fungsi Invers.

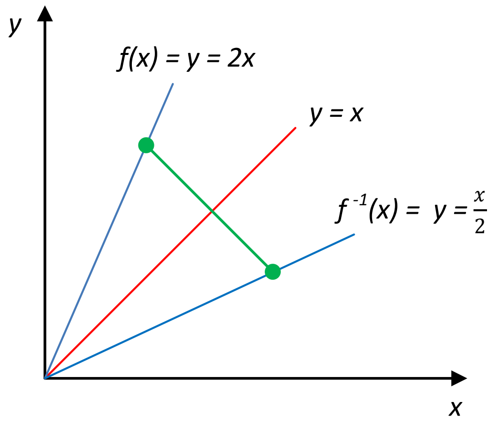
Fungsi invers merupakan suatu fungsi kebalikan atau percerminan terhadap fungsi y=x. Pada saat keadaan tertentu, kita dapat memperoleh x sebagai fungsi dari y dalam persamaan fungsi $y = f(x)$ yaitu $x = g(y)$.

Fungsi g disebut invers dari f, ditulis :

$$g = f^{-1}$$

Jadi :

$y = f(x)$ jika dan hanya jika $x = f^{-1}(y)$



Gambar 2.1. Grafik fungsi invers

Dari gambar di atas dapat kita perhatikan bahwa grafik $f^{-1}(x)$ merupakan hasil pencerminan dari grafik $f(x)$ terhadap garis $y = x$.

Contoh :

1. Tentukan invers dari $y = 2x$

   Jawab :

   Yang pertama kita lakukan adalah membalikkan x menjadi y pada persamaan fungsi di atas.

   $f(x) = y = 2x$

   Kita ubah x menjadi y dan y menjadi x, yaitu :

   $x = 2y$

   Selanjutnya kita ubah persamaan tersebut dimana y menjadi nilai yang akan dicari, sehingga :

   $y = \frac{x}{2}$

   Jadi :

   $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$

2. Tentukan invers dari $y = 4x - 6$
Jawab :
$f(x) = y = 4x - 6$
Kita ganti masing-masing x dan y, yaitu :
$x = 4y - 6$
$4y = x + 6$
$y = \frac{x + 6}{4}$
Jadi :
$f^{-1}(x) = \frac{x + 6}{4}$

3. Tentukan invers dari $y = 8x + 2$
Jawab :
$f(x) = 8x + 2$

Kita ganti masing-masing x dan y, yaitu :
$x = 8y + 2$
$8y = x - 2$
$y = \frac{x - 2}{8}$

Jadi :
$f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{8}$

4. Tentukan invers dari $y = x^2 + 7$
Jawab :
$f(x) = x^2 + 7$

Kita ganti masing-masing x dan y, yaitu :
$x = y^2 + 7$
$y^2 = x - 7$
$y = \sqrt{x - 7}$

Jadi :
$f^{-1}(x) = \sqrt{x-7}$

5. Tentukan invers dari $y = \sqrt{2x+5}$
Jawab :
$f(x) = \sqrt{2x+5}$

Kita ganti masing-masing x dan y, yaitu :
$x = \sqrt{2y+5}$
$x^2 = 2y+5$
$2y = x^2 - 5$
$y = \dfrac{x^2-5}{2}$

Jadi :
$f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-5}{2}$

6. Tentukan invers dari $y = \frac{1}{x-5}$
Jawab :
$f(x) = \dfrac{1}{x-5}$

Kita ganti masing-masing x dan y, yaitu :
$x = \dfrac{1}{y-5}$
$y - 5 = \dfrac{1}{x}$
$y = \dfrac{1}{x} + 5$

Jadi :
$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} + 5$

7. Tentukan invers dari $y = \frac{2x-3}{5}$

Jawab :

$$f(x) = y = \frac{2x-3}{5}$$

Kita ubah x dan y, maka :

$$x = \frac{2y-3}{5}$$
$$5x = 2y - 3$$
$$2y = 5x + 3$$
$$y = \frac{5x+3}{2}$$

Jadi :

$$f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{2}$$

8. Tentukan invers dari $y = \frac{5}{3x+7}$

Jawab :

$$f(x) = y = \frac{5}{3x+7}$$

Kita ubah terlebih dahulu x dan y.

$$x = \frac{5}{3y+7}$$

Selanjutnya kita cari nilai y.

$$3y + 7 = \frac{5}{x}$$
$$3y = \frac{5}{x} - 7$$
$$3y = \frac{5}{x} - \frac{7x}{x}$$
$$3y = \frac{5-7x}{x}$$
$$y = \frac{-7x+5}{3x}$$

Jadi :

$$f^{-1}(x) = \frac{-7x + 5}{3x}$$

9. Tentukan invers dari $y = \frac{x+3}{2x-2}$

Jawab :

$$f(x) = y = \frac{x + 3}{2x - 2}$$

Kita ubah terlebih dahulu x dan y.

$$x = \frac{y + 3}{2y - 2}$$

Selanjutnya kita akan mencari nilai y. Kita harus mengumpulkan x disisi kanan dan y disisi kiri.

$$x(2y - 2) = y + 3$$
$$2xy - 2x = y + 3$$
$$2xy - y = 2x + 3$$
$$(2x - 1)y = 2x + 3$$
$$y = \frac{2x + 3}{2x - 1}$$

Jadi :

$$f^{-1}(x) = \frac{2x + 3}{2x - 1}$$

10. Tentukan invers dari $y = \frac{3x}{x+5}$

Jawab:

$$f(x) = y = \frac{3x}{x + 5}$$

Kita ubah dahulu x dan y.

$$x = \frac{3y}{y + 5}$$
$$x(y + 5) = 3y$$
$$xy + 5x = 3y$$

Kita kumpulkan faktor y disisi kiri dan x disisi kanan, maka :
$xy - 3y = -5x$
$(x - 3)y = -5x$
$y = \frac{-5x}{x - 3}$

Jadi :
$f^{-1}(x) = \frac{-5x}{x - 3}$

B.2. Turunan dari Fungsi Invers.
Andaikan suatu fungsi dapat diturunkan atau monoton murni pada interval, dan turunannya tidak sama dengan nol, maka ini memiliki rumus persamaan fungsi.
Jika $y = f(x)$ dan $f^{'}(x) \neq 0$, maka teoremanya adalah :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Dalam notasi Leibniz dapat dituliskan :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

Contoh :
11. Diketahui $y = 2x^2 - 3$
Tentukan $(f^{-1})'(5)$

Jawab :
Maksud dari pertanyaan di atas adalah kita harus menentukan berapa nilai turunan dari invers pada titik $y = 5$.

Yang pertama kita cari adalah nilai x yang berpadanan dengan $y = 5$, yaitu :
$y = 2x^2 - 3$
$5 = 2x^2 - 3$

$2x^2 = 5 + 3$
$2x^2 = 8$
$x^2 = \frac{8}{2}$
$x^2 = 4$
$x = \sqrt{4}$
$x = 2$

Selanjutnya kita mencari turunan dari fungsi tersebut, yaitu :
$f(x) = 2x^2 - 3$
$f'(x) = 2(2)x^{2-1}$
$f'(x) = 4x$

Nah, setelah kita memperoleh turunannya, maka kita memasukkan nilai $x = 2$ yang telah kita peroleh di atas :
$f'(x) = 4x$
$f'(2) = 4(2)$
$f'(2) = 8$

Kemudian kita selesaikan dengan menggunakan teorema turunan dari fungsi invers, yaitu :
$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$
$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(2)}$
$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{8}$

12. Diketahui $y = x^3 + 2$
Tentukan $(f^{-1})'(10)$

Jawab :
Maksud dari pertanyaan di atas adalah kita harus menentukan berapa nilai turunan dari invers pada titik $y = 10$.

Yang pertama kita cari adalah nilai x yang berpadanan dengan $y = 10$, yaitu :
$y = x^3 + 2$
$10 = x^3 + 2$
$x^3 = 10 - 2$
$x^3 = 8$
$x = \sqrt[3]{8}$
$x = 2$

Selanjutnya kita mencari turunan dari fungsi tersebut, yaitu :
$f(x) = x^3 + 2$
$f'(x) = 3x^{3-1}$
$f'(x) = 3x^2$

Nah, setelah kita memperoleh turunannya, maka kita memasukkan nilai $x = 2$ yang telah kita peroleh di atas :
$f'(x) = 3x^2$
$f'(2) = 3(2)^2$
$f'(2) = 3(4)$
$f'(2) = 12$

Kemudian kita selesaikan dengan menggunakan teorema turunan dari fungsi invers, yaitu :
$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

$$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(2)}$$
$$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{12}$$

13. Diketahui $y = \sqrt{x+1}$
    Tentukan $(f^{-1})'(2)$

    Jawab :
    Maksud dari pertanyaan di atas adalah kita harus menentukan berapa nilai turunan dari invers pada titik $y = 2$.

    Yang pertama kita cari adalah nilai x yang berpadanan dengan $y = 2$, yaitu :
    $$y = \sqrt{x+1}$$
    $$2 = \sqrt{x+1}$$
    $$2^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$$
    $$4 = x+1$$
    $$x = 4-1$$
    $$x = 3$$

    Selanjutnya kita mencari turunan dari fungsi tersebut, yaitu :
    $$f(x) = \sqrt{x+1}$$
    $$f(x) = (x+1)^{1/2}$$
    $$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{1/2-1}$$
    $$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$$
    $$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$$
    $$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Nah, setelah kita memperoleh turunannya, maka kita memasukkan nilai $x = 3$ yang telah kita peroleh di atas :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$
$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}}$$
$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{4}}$$
$$f'(3) = \frac{1}{2\,(2)}$$
$$f'(3) = \frac{1}{4}$$

Kemudian kita selesaikan dengan menggunakan teorema turunan dari fungsi invers, yaitu :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$
$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(3)}$$
$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{1/4}$$
$$(f^{-1})'(2) = 4$$

14. Diketahui $y = x^2 + 7$
    Tentukan $(f^{-1})'(11)$

    Jawab :
    Maksud dari pertanyaan di atas adalah kita harus menentukan berapa nilai turunan dari invers pada titik $y = 11$.

Yang pertama kita cari adalah nilai x yang berpadanan dengan $y = 11$, yaitu :

$y = x^2 + 7$
$11 = x^2 + 7$
$x^2 = 11 - 7$
$x^2 = 4$
$x = \sqrt{2}$
$x = 2$

Selanjutnya kita mencari turunan dari fungsi tersebut, yaitu :

$f(x) = x^2 + 7$
$f^{'(x)} = 2x^{2-1} + 0$
$f'(x) = 2x$

Nah, setelah kita memperoleh turunannya, maka kita memasukkan nilai $x = 2$ yang telah kita peroleh di atas :

$f'(x) = 2x$
$f'(2) = 2(2)$
$f'(2) = 4$

Kemudian kita selesaikan dengan menggunakan teorema turunan dari fungsi invers, yaitu :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$
$$(f^{-1})'(11) = \frac{1}{f'(2)}$$
$$(f^{-1})'(11) = \frac{1}{4}$$

C. LATIHAN

Tentukan invers dari :

1. $y = 3x + 7$

   Kunci jawaban :

   $$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$$

2. $y = 2x^2 - 1$

   Kunci jawaban :

   $$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

3. $y = \frac{3}{2x+3}$

   Kunci jawaban :

   $$f^{-1}(x) = -\frac{3x+3}{2x}$$

4. Diketahui $y = 2x^2 - 5$

   Tentukan $(f^{-1})'(13)$

   Kunci jawaban :

   $$(f^{-1})'(13) = \frac{1}{12}$$

5. Diketahui $y = \sqrt{x+2}$

   Tentukan $(f^{-1})'(4)$

   Kunci jawaban :

   $(f^{-1})'(4) = 8$

D. TUGAS

Tentukan invers dari :

1. $y = -3x + 2$
2. $y = x^2 - 2$
3. $y = \frac{5}{x-1}$
4. Diketahui $y = x^2 - 7$
   Tentukan $(f^{-1})'(11)$
5. Diketahui $y = \sqrt{x - 3}$
   Tentukan $(f^{-1})'(2)$

BAB III

FUNGSI EKSPONEN

BAB III. FUNGSI EKSPONEN

A. PENDAHULUAN

Pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami fungsi-fungsi eksponen, persamaan dan pertidaksamaan eksponen.
2. Mampu menjelaskan gambaran umum dan penggunaan dari fungsi eksponen dengan disertai beberapa contoh.

B. PENYAJIAN MATERI

Pengertian dari eksponen adalah sebuah bilangan yang berpangkat atau sebuah perkalian yang berulang-ulang.Dalam penulisan bentuk umum sering ditulis dengan :

$$a^n$$

Keterangan :

a = Bilangan pokok

n = pangkat atau eksponen

Sebagai contoh:

$$3^4$$

Dimana 3 adalah bilangan pokok dan 4 adalah eksponen.

Untuk menghitung nilai dari :

$$3^4$$

Maka dapat diselesaikan dengan :

$$3^4 = 3x3x3x3 = 81$$

B.1. Sifat-sifat Fungsi Eksponen

1) $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$
2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3) $a^n \,.\, b^n = (a.b)^n$
4) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
5) $(a^m)^n = a^{m\ x\ n}$
6) $a^0 = 1$
7) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

8) $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

9) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

10) $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{1/n}}$

Berikut ini contoh-contoh dari sifat-sifat fungsi eksponen.

1) $2^2 \,.\, 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 2x2x2x2x2 = 32$

2) $\frac{2^4}{2^2} = 2^{4-2} = 2^2 = 2x2 = 4$

3) $2^2 \,.\, 3^2 = (2\ x\ 3)^2 = 6^2 = 6\ x\ 6 = 36$

4) $\frac{4^3}{2^3} = \left(\frac{4}{2}\right)^3 = 2^3 = 2\ x\ 2\ x\ 2 = 8$

5) $(4^2)^3 = 4^{2\ x\ 3} = 4^6 = 4096$

6) $13^{(0)} = 1$

7) $\sqrt[3]{4^6} = 4^{\frac{6}{3}} = 4^2 = 4\ x\ 4 = 16$

8) $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2x5} = \sqrt[3]{10}$

9) $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

10) $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{1/2}}$

Adapun untuk contoh-contoh penyelesaian sifat dari eksponen lainnya adalah :

1) $(3x^2y^{-3})^2$

Hal ini dapat diselesaikan dengan mengikuti syarat dari sifat-sifat eksponen yaitu :

$(3x^2y^{-3})^2$

$= (3x^2)^2(y^{-3})^2$

$= 9x^4.y^{-6}$

$= 9x^4 \frac{1}{y^6}$

$= \frac{9x^4}{y^6}$

2) $(2x^2 . y^{-3})(-3x^{-4} . y^6)$

Hal ini dapat diselesaikan dengan mengikuti syarat dari sifat-sifat eksponen yaitu :

$(2x^2 . y^{-3})(-3x^{-4} . y^6)$

$= (2x^2)(-3x^{-4})(y^{-3})(y^6)$

$= (-6x^{-2})(y^3)$

$= -6\frac{1}{x^2}(y^3)$

$= -\frac{6y^3}{x^2}$

3) $\left(\sqrt[3]{x^2} . y^{-2}\right)^2$

Hal ini dapat diselesaikan dengan mengikuti syarat dari sifat-sifat eksponen yaitu :

$\left(\sqrt[3]{x^2} . y^{-2}\right)^2$

$= \left(x^{2/3}\right)^2 . (y^{-2})^2$

$= x^{4/3} . y^{-4}$

$= \frac{x^{4/3}}{y^4}$

$= \frac{\sqrt[3]{x^4}}{y^4}$

4) $\frac{(\sqrt{x})^3}{(\sqrt{x^3})^3}$

Hal ini dapat diselesaikan dengan mengikuti syarat dari sifat-sifat eksponen yaitu :

$\frac{(\sqrt{x})^3}{(\sqrt{x^3})^3}$

$$= \frac{\left(x^{1/2}\right)^3}{\left(x^{3/2}\right)^3}$$
$$= \left(x^{3/2}\right)\left(x^{-9/2}\right)$$
$$= x^{-6/2}$$
$$= x^{-3}$$
$$= \frac{1}{x^3}$$

5) $\frac{3x^2.y^2}{(x^8.y^6)}$

Hal ini dapat diselesaikan dengan mengikuti syarat dari sifat-sifat eksponen yaitu :

$$\frac{3x^2.y^2}{(x^8.y^6)}$$
$$= (3x^2.y^2)(x^{-8}.y^{-6})$$
$$= (3x^2)(x^{-8})(y^2)(y^{-6})$$
$$= 3x^{-6}.y^{-4}$$
$$= \frac{3}{x^6.y^4}$$

6) $\frac{2x^{1/2}.y^{1/2}.}{x^{-1/2}\ .\ y^{-3/2}}$

Hal ini dapat diselesaikan dengan mengikuti syarat dari sifat-sifat eksponen yaitu :

$$= \left(2x^{1/2}.y^{1/2}\right)\left(x^{1/2}\ .\ y^{3/2}\right)$$
$$= \left(2x^{1/2}\right)\left(x^{1/2}\right)\left(y^{1/2}\right)\left(y^{3/2}\right)$$
$$= 2x\ .y^{4/2}$$
$$= 2x\ .y^2$$

B.2. Persamaan Eksponen

Persamaan eksponen adalah persamaan yang pangkatnya mengandung variabel dan tidak menutup kemungkinan bilangan dasarnya juga mengandung variabel.

Ada beberapa teorema untuk persamaan eksponen, yaitu :

(1) $a^{f(x)} = a^n$ a > 0 ; a ≠ 1
maka :
$f(x) = n$

(2) $a^{f(x)} = 1$ a > 0 ; a ≠ 1
maka :
$f(x) = 0$

(3) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ a > 0 ; a ≠ 1
maka :
$f(x) = g(x)$

(4) $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ a > 0 ; a ≠ 1 ; b > 0 ; b ≠ 1 ; a ≠ b
maka :
$f(x) = 0$

(5) $\{h(x)\}^{f(x)} = \{h(x)\}^{g(x)}$
Maka kemungkinannya adalah :
1. $h(x) = 0$; asalkan $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya positif ($f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$)
2. $h(x) = 1$
3. $h(x) = -1$; asalkan $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya ganjil atau keduanya genap $\left((-1)^{f(x)-g(x)} = 1\right)$
4. $f(x) = g(x)$; asalkan $h(x) \neq 0$ dan $h(x) \neq 1$

(6) $\{(h(x))\}^{f(x)} = 1$
Maka kemungkinannya adalah :
1. $f(x) = 0$; $h(x) \neq 0$
2. $h(x) = 1$
3. $h(x) = 1$; $f(x) = \pm\frac{p}{q}$; dengan p dan q adalah bilangan asli yang dapat saling membagi

(tidak mempunyai faktor persekutuan), dan p adalah bilangan genap.

(7) $a^{f(x)} = b^{g(x)}$; a > 0 ; a ≠ 1 ; b > 0 ; b ≠ 1
maka :
$f(x) \log a = g(x) \log b$

(8) $a^{f(x)} = b$; a > 0 ; a ≠ 1 ; b> 0
maka :
$f(x) = \frac{\log b}{\log a} = a_{\log\ b}$

Berikut ini beberapa contoh penyelesaian dari persamaan fungsi eksponen.

1. Carilah himpunan penyelesian dari setiap persamaan :
$10^{2x-3} = 100.000$
Jawab:
$10^{2x-3} = 100.000$
$10^{2x-3} = 10^5$
$2x - 3 = 5$
$2x = 5 + 3$
$2x = 8$
$x = \frac{8}{2}$
$x = 4$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {4}.

2. Carilah himpunan penyelesian dari setiap persamaan :$2^{2x^2+3x-5} = 1$
Jawab :
$2^{2x^2+3x-5} = 2^0$
$2x^2 + 3x - 5 = 0$
$(2x + 5)(x - 1) = 0$

$2x + 5 = 0$
$2x = -5$
$x_1 = \frac{-5}{2}$

dan
$x-1 = 0$
$x_2 = 1$

3. Carilah himpunan penyelesian dari setiap persamaan :
$3^{5x-10} = 1$
Jawab :
$3^{5x-10} = 3^0$
5x – 10 = 0
5x = 10
x = 10/5
x = 2

4. Carilah himpunan penyelesian dari setiap persamaan :
$5^{2x-1} = 125$
Jawab:
$5^{2x-1} = 125$
$5^{2x-1} = 5^3$
$2x - 1 = 3$
2x = 3 + 1
2x = 4
x = 4/2
x = 2

5. Carilah himpunan penyelesian dari setiap persamaan :
$5^{x^2+x-2} = 1$
Jawab :
$5^{x^2+x-2} = 5^0$

$x^2 + x - 2 = 0$
$(x + 2)(x - 1) = 0$
x + 2 = 0
$x_1 = -2$
dan
x – 1 = 0
$x_2 = 1$

6. Carilah himpunan penyelesian dari setiap persamaan :
$2 = 16^{3-x}$
jawab :
$2 = 16^{3-x}$
$2 = (2^4)^{3-x}$
$2 = 2^{4(3-x)}$
$2 = 2^{12-4x}$
$2^1 = 2^{12-4x}$
$1 = 12 - 4x$
4x = 12 – 1
4x = 11
$x = \frac{11}{4}$

7. Carilah himpunan penyelesian dari setiap persamaan :
$16^{3-x} = 4^{x+3}$
jawab :
$16^{3-x} = 4^{x+3}$
$(2^4)^{3-x} = (2^2)^{x+3}$
$2^{4(3-x)} = 2^{2(x+3)}$
$2^{12-4x} = 2^{2x+6}$
$12 - 4x = 2x + 6$
2x+4x = 12 – 6
6x = 6
x = 1

C. LATIHAN

Selesaikanlah sifat eksponen berikut dengan mengikuti syarat dari sifat-sifat eksponen.

1. $(2x.y^{-2})^2$

   Kunci jawabannya adalah :

   $\frac{4x^2}{y^4}$

2. $\frac{2x^2.y}{x^3.y^3}$

   Kunci jawabannya adalah :

   $\frac{2}{x.y^2}$

Carilah himpunan penyelesian dari setiap persamaan :

3. $2x^2 + 4x + 2 = 0$

   Kunci jawabannya adalah :

   $x = -1$

4. $9^{x-3} = 81^{x-2}$

   Kunci jawabannya adalah :

   $x = 1$

5. $2^{2x+3} = 32$

   Kunci jawabannya adalah :

   $x = 1$

D. TUGAS

Selesaikanlah sifat eksponen berikut dengan mengikuti syarat dari sifat-sifat eksponen.

1. $(x^2.y^{-2})^3$
2. $\frac{5x^2.2y^2}{x^3.y^3}$
3. $5^{x^2+5x+6} = 1$
4. $4^{x+5} = 16^{x+3}$
5. $3^{3x-2} = 81$

BAB IV

FUNGSI TRIGONOMETRI INVERS

BAB IV. FUNGSI TRIGONOMETRI INVERS

A. PENDAHULUAN

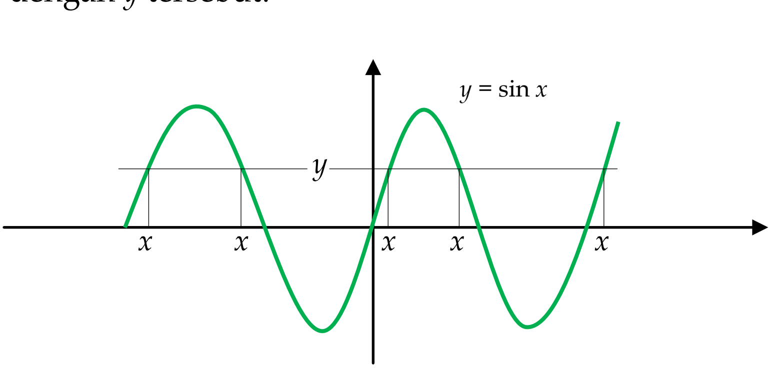
Pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami definisi dari fungsi trigonometri invers atau balikan dari fungsi trigonometri.
2. Memahami mencari fungsi trigonometri invers.
3. Memahami grafik fungsi sinus, kosinus dan tangen dan fungsi inversnya.

B. PENYAJIAN MATERI

Pada pembelajaran kalkulus 1 telah kita ketahui bahwa ada enam fungsi dasar trigonometri yaitu sinus, kosinus, tangen, kotangen, sekan dan kosekan. Kita juga telah memahami penyelesaian trigonometri tersebut untuk menghitung panjang, luas dan volume dari garis atau bidang yang memiliki sudut.

Mengenai fungsi inversnya masih terdapat pemahaman yang rumit, sebab untuk tiap y dalam daerah hasilnya, ada tak terhingga banyaknya nilai x yang berpadanan dengan y tersebut.

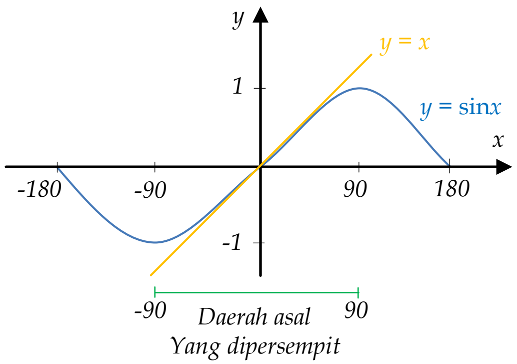


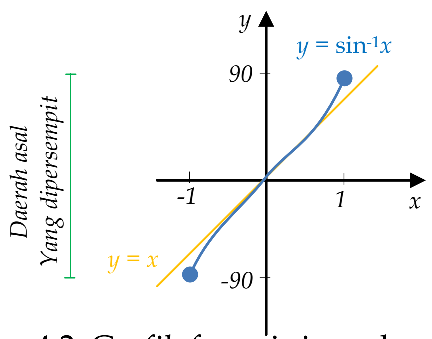
Gambar 4.1 Fungsi sinus

Akan tetapi kita juga dapat mendefinisikan nantinya fungsi invers dari fungsi trigonometri tersebut kedalam pemahaman yang lebih sederhana. Hal ini dapat kita lakukan dengan cara mempersempit daerah asal dari fungsi tersebut.

Fungsi Invers Sinus dan Kosinus

Kita akan membatasi daerah asal untuk menyelesaikan kasus pada sinus dan kosinus, sedangkan daerah hasilnya akan kita ambil seluas mungkin asalkan fungsi itu memiliki invers.

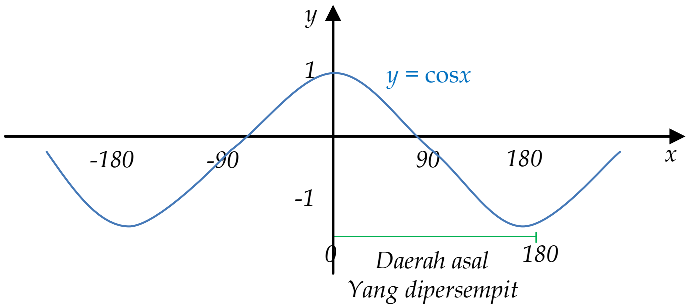


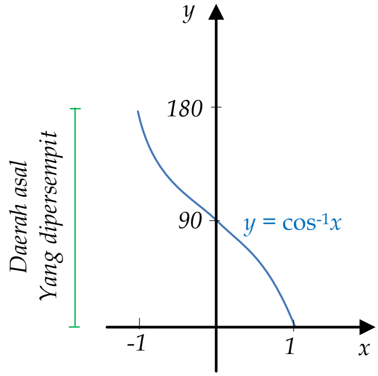


Gambar 4.2 Grafik fungsi sinus dan inversnya

Jadi dapat kita simpulkan bahwa untuk memperoleh invers dari sinus adalah dengan cara kita membatasi daerah asal fungsi tersebut pada selang [-90^0, 90^0].

Begitu juga akan kita terapkan pada fungsi kosinus di bawah ini.





Gambar 4.3 Grafik fungsi kosinus dan inversnya

Jadi dapat kita simpulkan bahwa untuk memperoleh invers dari kosinus adalah dengan cara kita membatasi daerah asal fungsi tersebut pada selang $[0^0, 180^0]$.

Sehingga :

$x = \sin^{-1} y \Leftrightarrow y = \sin x \quad ; \quad -90^0 \leq x \leq 90^0$

dan

$x = \cos^{-1} y \quad y = \cos x \quad ; \quad 0^0 \leq x \leq 180^0$

Lambang sin^{-1}seringkali ditulis dengan lambang *arcsin* dan cos^{-1} dengan lambang *arccos*.

Untuk memudahkan dalam menyelesaikan invers fungsi trigonometri ada baiknya kita juga menggunakan tabel sudut-sudut istimewa pada fungsi trigonometri.

Sudut	**0^0**	**30^0**	**45^0**	**60^0**	**90^0**	**120^0**	**135^0**	**150^0**	**180^0**
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$^1/_2$	0
Cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$^1/_2$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0
Tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	- 1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
Sec	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	- 2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	- 1
Cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	- 1	$-\sqrt{3}$	∞

Gambar 4.4 Sudut-sudut istimewa fungsi trigonometri

Contoh :

1. Tentukan $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   Jawab :

   Berdasarkan gambar 4.2 dan 4.4 diperoleh bahwa untuk invers dari :

   $$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^0$$

2. Tentukan $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

   Jawab :

   Berdasarkan gambar 4.2 dan 4.4 diperoleh bahwa untuk invers dari :

   $$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -30^0$$

3. Tentukan $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   Jawab :

   $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^0$

4. Tentukan $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

   Jawab :

   $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^0$

5. Tentukan $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

   Jawab :

   Untuk soal seperti ini kita harus selesaikan di bagian kurung dalam terlebih dahulu.

   $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

   $= \cos(60)$

   $= \frac{1}{2}$

6. Tentukan $\sin^{-1}(\sin 270^0)$

   Jawab :

   Sama seperti pada contoh 5, yaitu :

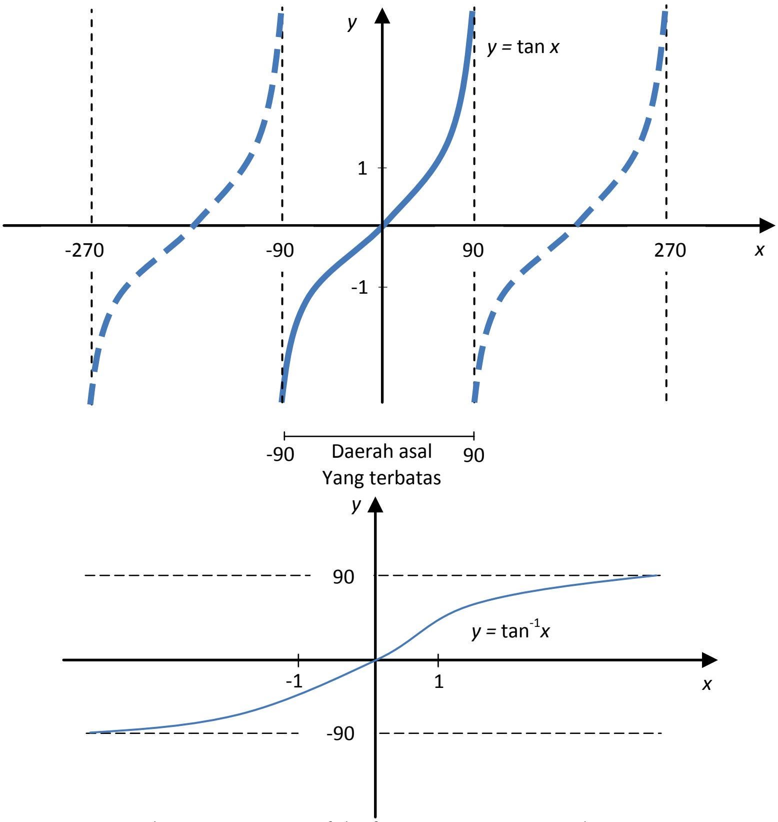
   $\sin^{-1}(\sin 270^0)$

   $= \sin^{-1}(-1)$

   $= -90^0$

Invers Tangen

Berikut ini gambar untuk grafik fungsi dari invers tangen.



Gambar 4.5. Grafik fungsi tangen dan inversnya

Jadi dapat kita simpulkan bahwa untuk memperoleh invers dari tangen adalah dengan cara kita membatasi daerah asal fungsi tersebut pada selang [-90^0, 90^0].

Sehingga :

$x = \tan^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan x \quad ; \quad -90^0 \leq x \leq 90^0$

Contoh :

7. Hitunglah

   $\tan^{-1}(1) = ?$

Jawab :
Perhatikan kembali tabel pada gambar 4.4 di atas bahwa hasilnya adalah :
$\tan^{-1}(1) = 45^0$

8. Hitunglah
$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = ?$
Jawab :
Untuk menyelesaikan invers ini maka kita harus memperhatikan gambar 4.5 di atas, yaitu :
$x = -\sqrt{3} = -1,732$

Pada gambar 4.4 diperoleh bahwa :
$\tan 120 = -\sqrt{3}$

Berarti x berpadanan dengan titik :
$180^0 - 120^0 = 60^0$

Maka :
$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = 60^0$

C. LATIHAN

1. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   Kunci jawaban = 45^0

2. $\cos^{-1}(0)$
   Kunci jawaban = 90^0

3. $\tan^{-1}(1)$
   Kunci jawaban = 45^0

D. TUGAS

1. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
4. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
5. $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

BAB V

INTEGRAL DENGAN SUBSTITUSI

BAB V. INTEGRAL DENGAN SUBSTITUSI

A. PENDAHULUAN

Pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami definisi dari pengintegralan dengan substitusi pada integral tak tentu dan integral tentu.
2. Menyelesaikan integral tak tentu dengan menggunakan metode substitusi.
3. Menghitung integral tentu dengan menggunakan metode substitusi.

B. PENYAJIAN MATERI

Integral substitusi merupakan metode penyelesaian integral dengan cara mengganti atau mensubstitusikan fungsi *f(x)* dengan menggunakan simbol "u".

B. 1. Substitusi Dalam Integral Tak-Tentu

Apabila kita menghadapi suatu integral tak tentu yang merupakan bentuk baku maka segera kita dapat menuliskan hasilnya. Apabila tidak, carilah substitusi yang akan mengubahnya menjadi suatu bentuk baku. Apabila pada substitusi yang pertama kita tidak berhasil memperoleh bentuk baku maka kita akan mencoba dengan cara lain. Apabila kita berlatih cukup lama maka kita akan menemukan pengganti yang tepat.

Ada 3 (tiga) langkah yang kita lakukan pada cara substitusi ini, yatu :

(a) Pilihlah fungsi *f(x)* yang akan kita pakai sebagai "u". Fungsi ini biasanya fungsi yang paling rumit dan panjang.

(b) Carilah nilai turunan dari fungsi "u", kemudian dari hasil turunan tersebut tentukan nilai *dx*.

(c) Masukkan ke persamaan awal dan selesaikan integral tersebut.

Contoh :

1) $\int (2x+3)^4 dx$

Jawab :

(a) Pilihlah fungsi *f(x)* yang akan kita pakai sebagai "u". Fungsi ini biasanya fungsi yang paling rumit dan panjang.

u = (2x +3)

(b) Carilah nilai turunan dari fungsi "u", kemudian dari hasil turunan tersebut tentukan nilai *dx*.

$$u = (2x+3)$$
$$\frac{du}{dx} = 2$$
$$2dx = du$$
$$dx = \frac{du}{2}$$

(c) Masukkan ke persamaan awal dan selesaikan integral tersebut.

$$\int (2x+3)^4 dx$$
$$= \int u^4 . \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int u^4 . du$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4+1}u^{4+1}\right) + C$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \frac{1}{10}u^5 + C$$
$$= \frac{1}{10}(2x+3)^5 + C$$

2) $\int 5(5x+3)^4 dx$
Jawab :
u = 5x+3
$\frac{du}{dx} = 5$
5 dx = du
$dx = \frac{du}{5}$

$$\int 5(5x+3)^4 dx$$
$$= \int 5.u^4.\frac{du}{5}$$
$$= \frac{5}{5}\int u^4.du$$
$$= \int u^4.du$$
$$= \left(\frac{1}{4+1}u^{4+1}\right) + C$$
$$= \frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \frac{1}{5}(5x+3)^5 + C$$

3) $\int (3x+4)^5 dx$
Jawab :
u = 3x+4
$\frac{du}{dx} = 3$
$dx = \frac{du}{3}$

$$\int (3x+4)^5 dx$$
$$= \int u^5 \frac{du}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\int u^5\, du$$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}u^6\right) + \mathrm{C}$

$= \frac{1}{18}(u)^6 + C$

$= \frac{1}{18}(3x+4)^6 + C$

4) $10\int(5x+3)^4 dx$
Jawab :
u = 5x+3

$\frac{du}{dx} = 5$

$dx = \frac{du}{5}$

$10\int(5x+3)^4 dx$

$= 10\int u^4 \frac{du}{5}$

$= \frac{10}{5}\int u^4 du$

$= 2\int u^4 du$

$= 2\left(\frac{1}{5}u^5\right) + C$

$= \frac{2}{5}(5x+3)^5 + C$

5) $\int(3x+1)^5 \,.\, 3\; dx$
Jawab :
u = 3x+1

$\frac{du}{dx} = 3$

$dx = \frac{du}{3}$

$\int(3x+1)^5 \,.\, 3\; dx$

$$= \int u^5 \,.\, 3\ \frac{du}{3}$$
$$= \int u^5 . du$$
$$= \frac{1}{6} u^6 + C$$
$$= \frac{1}{6} (3x + 1)^6 + C$$

6) $\int (x^2 - 4)^3 . 2x. dx$
Jawab :
$u = x^2 - 4$
$$\frac{du}{dx} = 2x$$
$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int (x^2 - 4)^3 . 2x. dx$$
$$= \int u^3 . 2x. \left(\frac{du}{2x}\right)$$
$$= \int u^3 du$$
$$= \frac{1}{4} u^4 + C$$
$$= \frac{1}{4} (x^2 - 4)^4 + C$$

7) $\int (5x^3 - 18)^7 . 15x^2 . dx$
Jawab :
$u = 5x^3 - 18$
$$\frac{du}{dx} = 15x^2$$
$$dx = \frac{du}{15x^2}$$

$$\int (5x^3 - 18)^7 . 15x^2 . dx$$

$$= \int u^7 . 15x^2 \left(\frac{du}{15x^2}\right)$$
$$= \int u^7 . du$$
$$= \frac{1}{8} u^8 + C$$
$$= \frac{1}{8} (5x^3 - 18)^8 + C$$

8) $\int 3x^4 (2x^5 + 9)^3 dx$
Jawab :
$u = 2x^5 + 9$
$$\frac{du}{dx} = 10x^4$$
$$dx = \frac{du}{10x^4}$$

$$\int 3x^4 (2x^5 + 9)^3 dx$$
$$= \int 3x^4 (u)^3 \left(\frac{du}{10x^4}\right)$$
$$= \int (u)^3 \left(\frac{3x^4 du}{10x^4}\right)$$
$$= \frac{3}{10} \int u^3 du$$
$$= \frac{3}{10} \left(\frac{1}{4} u^4\right) + C$$
$$= \frac{3}{40} u^4 + C$$
$$= \frac{3}{40} (2x^5 + 9)^4 + C$$

9) $\int (x^2 - 3x + 2)^2 (2x - 3) dx$
Jawab :
$u = x^2 - 3x + 2$
$$\frac{du}{dx} = 2x - 3$$

$$dx = \frac{du}{2x-3}$$

$$\int (x^2 - 3x + 2)^2 (2x-3) dx$$
$$= \int u^2 \, (2x-3) \left\{\frac{du}{(2x-3)}\right\}$$
$$= \int u^2 du$$
$$= \frac{1}{3} u^3 + C$$
$$= \frac{1}{3} (x^2 - 3x + 2)^3 + C$$

10) $\int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 8)^6 \, dx$

Jawab :

$$u = 5x^3 + 3x - 8$$
$$\frac{du}{dx} = 15x^2 + 3$$
$$dx = \frac{du}{15x^2 + 3}$$

$$\int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 8)^6 \, dx$$
$$= \int (5x^2 + 1)(u)^6 \left\{\frac{du}{(15x^2 + 3)}\right\}$$
$$= \int (5x^2 + 1)(u)^6 \left\{\frac{du}{3(5x^2 + 1)}\right\}$$
$$= \int (u)^6 \left\{\frac{(5x^2 + 1)du}{3(5x^2 + 1)}\right\}$$
$$= \int (u)^6 \frac{du}{3}$$
$$= \frac{1}{3} \int u^6 du$$
$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} u^7\right) + C$$

$$= \frac{1}{21}u^7 + C$$

$$= \frac{1}{21}(5x^3 + 3x - 8)^7 + C$$

B. 2. Substitusi Dalam Integral Tentu

Substitusi dalam integral tentu sama halnya pada saat kita menyelesaikan substutisu dalam integral tak tentu, hanya saja kita tidak boleh lupa untuk mengubah batas-batas pengintegralan tersebut.

Andaikan g mempunyai turunan kontinu pada [a,b] dan andaikan f kontinu pada daerah nilai dari g. Maka:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \,.\, g^{'(x)}.\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u).\, du$$

Ada 4 (empat) langkah yang kita lakukan pada cara substitusi ini, yatu :

(a) Pilihlah fungsi *f(x)* yang akan kita pakai sebagai "u". Fungsi ini biasanya fungsi yang paling rumit dan panjang.

(b) Carilah nilai turunan dari fungsi "u", kemudian dari hasil turunan tersebut tentukan nilai *dx*.

(c) Cari lah masing-masing *g(a)* dan *g(b)* berdasarkan dari *f(u)*.

(d) Masukkan ke persamaan awal dan selesaikan integral tersebut.

Contoh :

1) Hitung $\int_1^3 (3x+1)^3 dx$

Jawab :

(a) Pilihlah fungsi *f(x)* yang akan kita pakai sebagai "u". Fungsi ini biasanya fungsi yang paling rumit dan panjang.

$u = 3x + 1$

(b) Carilah nilai turunan dari fungsi "u", kemudian dari hasil turunan tersebut tentukan nilai *dx*.

$u = 3x + 1$

$\frac{du}{dx} = 3$

$dx = \frac{du}{3}$

(c) Cari lah masing-masing *g(a)* dan *g(b)* berdasarkan dari *f(u)*.

x = 1

Maka :

$u = 3x + 1$

$u = 3\,(1) + 1$

$u = 3 + 1$

$u = 4$

x = 3

Maka :

$u = 3x + 1$

$u = 3\,(3) + 1$

$u = 9 + 1$

$u = 10$

(d) Masukkan ke persamaan awal dan selesaikan integral tersebut.

$$\int_1^3 (3x+1)^3 dx$$
$$= \int_4^{10} u^3 \frac{du}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\int_4^{10} u^3 du$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3+1} u^{3+1}\right]_4^{10}$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4} u^4\right]_4^{10}$$
$$= \frac{1}{12}[u^4]_4^{10}$$
$$= \frac{1}{12}(10)^4 - \frac{1}{12}(4)^4$$
$$= \frac{10000}{12} - \frac{256}{12}$$
$$= 833{,}33 - 21{,}33$$
$$\approx 812$$

2) Hitung $\int_2^5 x\sqrt{x^2-4}\,dx$

Jawab :

$u = x^2 - 4$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$dx = \frac{du}{2x}$

Untuk

$x = 2$

$u = (2)^2 - 4$

$u=4-4$

$u=0$

untuk

$x = 5$

$u = (5)^2 - 4$

$u = 25 - 4$

$u = 21$

maka :

$$\int_2^5 x\sqrt{x^2 - 4}\,dx$$

$$= \int_2^5 x(x^2 - 4)^{1/2}\,dx$$

$$= \int_2^5 (x^2 - 4)^{1/2}\ .x.dx$$

$$= \int_0^{21} (u)^{1/2}\ .x\frac{du}{2x}$$

$$= \int_0^{21} (u)^{1/2}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{21} (u)^{1/2}\ du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{21}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^{21}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^{21}$$

$$= \frac{1}{3}\left[u^{3/2}\right]_0^{21}$$

$$= \frac{1}{3}(21)^{3/2} - 0$$

$$\approx 32{,}08$$

3) Hitung $\int_1^2 (2x+3)^2 dx$

Jawab :

$u = 2x + 3$

$\frac{du}{dx} = 2$

$dx = \frac{du}{2}$

Untuk

$x = 1$

$u = 2(1) + 3$

$u = 2+3$

$u=5$

untuk

$x = 2$

$u = 2(2) + 3$

$u = 4+3$

$u=7$

$$\int_5^7 (u)^2 \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_5^7 (u)^2 du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_5^7$$

$$= \left[\frac{1}{6}u^3\right]_5^7$$

$$= \frac{1}{6}(7)^3 - \frac{1}{6}(5)^3$$

$$= \frac{1}{6}(343) - \frac{1}{6}(125)$$

$$= 51{,}17 - 20{,}83$$

$$\approx 30{,}34$$

4) $10\int_1^2 (5x+3)^2 dx$

Jawab :

$u = 5x + 3$

$\frac{du}{dx} = 5$

$dx = \frac{du}{5}$

Untuk

$x = 1$

$u = 5(1) + 3$

$u = 5+3$

$u=8$

untuk

$x = 2$

$u = 5(2) + 3$

$u = 10+3$

$u=13$

$$10\int_1^2 (5x+3)^2 dx$$

$$= 10\int_8^{13} (u)^2 \frac{du}{5}$$

$$= \frac{10}{5}\int_8^{13} (u)^2\, du$$

$$= 2\int_8^{13} (u)^2\, du$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}u^3\right]_8^{13}$$

$$= \left[\frac{2}{3}u^3\right]_8^{13}$$

$$= \frac{2}{3}(13)^3 - \frac{2}{3}(8)^3$$

$$= \frac{2}{3}(2197) - \frac{2}{3}(512)$$

$= 1464{,}67 - 341{,}33$
$\approx 1123{,}34$

5) Hitung $\int_1^2 (3x + 4)^2 dx$
Jawab :
$u = 3x + 4$
$\frac{du}{dx} = 3$
$dx = \frac{du}{3}$

Untuk
$x = 1$
$u = 3(1) + 4$
$u = 3 + 4$
$u = 7$

untuk
$x = 2$
$u = 3(2) + 4$
$u = 6 + 4$
$u = 10$

$$\int_1^2 (3x + 4)^2 dx$$
$$= \int_7^{10} u^2 \frac{du}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\int_7^{10} u^2 du$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_7^{10}$$
$$= \left[\frac{1}{9}u^3\right]_7^{10}$$
$$= \frac{1}{9}(10)^3 - \frac{1}{9}(7)^3$$

$$= \frac{1}{9}(1000) - \frac{1}{9}(343)$$
$$= 111{,}11 - 38{,}11$$
$$\approx 73$$

C. LATIHAN

1. Tentukan $\int (3x-2)^3\, dx$
   Kunci jawaban :
   $$\frac{1}{2}(3x-2)^4 + C$$

2. Tentukan $\int (5x+7)^4 \,.\, 5\, dx$
   Kunci jawaban :
   $$\frac{1}{5}(5x+7)^5 + C$$

3. Tentukan $\int (x^2+5)^2 \,.\, 2x.\, dx$
   Kunci jawaban :
   $$\frac{1}{3}(x^2+5)^3 + C$$

4. Hitunglah
   $$\int_0^2 (2x-5)^2\, dx$$
   Kunci jawaban :
   $$\int_0^2 (2x-5)^2\, dx \approx 20{,}66$$

5. Hitunglah
   $$3\int_1^2 (3x+1)^2\, dx$$

Kunci jawaban :

$$3\int_{1}^{2}(3x+1)^2\,dx \approx 93$$

D. TUGAS

Selesaikanlah soal dibawah ini seperti pada contoh di atas :

1. $\int (4x+5)^5\,dx$
2. $\int (3x-5)\,.\,3\,dx$
3. $\int (x^3-2)^3\,.\,3x.\,dx$
4. $\int_1^2 (2x+3)^3\,dx$
5. $5\int_1^2 (5x+5)^2\,dx$

BAB VI

INTEGRAL TRIGONOMETRI

BAB VI. INTEGRAL TRIGONOMETRI

A. PENDAHULUAN

Pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami definisi pengintegralan trigonometri.
2. Menyelesaikan integral trigonometri dengan menggunakan teknik pengintegralan.

B. PENYAJIAN MATERI

Sebelum membahas teknik pengintegralan khususnya yang berkaitan dengan fungsi trigonometri, ada baiknya kita harus mengingat kembali aturan-aturan dalam trigonometri dan sifat-sifat dari fungsinya.

(a) $sin^2x + cos^2x = 1$
(b) $sin^2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
(c) $cos^2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
(d) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
(e) $1 + tan^2x = sec^2x$
(f) $\cos 2x = cos^2x - sin^2x$
(g) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
(h) $1 + cotg^2x = cosec^2x$

Aturan-aturan fungsi integral tak tentu fungsi trigonometri.

a) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
b) $\int cos\, \mathrm{x}\, dx = \sin x + C$
c) $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$
$= -\ln|\cos x| + C$
d) $\int \cot x\, dx = -\ln|\csc x| + C$
$= \ln x|\sin x| + C$
e) $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
f) $\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
g) $\int \tan x \sec x\, dx = \sec x + C$
h) $\int \cot x\, cosec\ x\, dx = -cosec\ x + C$

i) $\int \sin mx\, dx = -\frac{1}{m}\cos mx$

j) $\int \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx$

Contoh :

1) Tentukan intrgral tak tentu

$$\int \left((x^3) + \sin x\right) dx$$

Penyelesaian :

$\int \left((x^3) + \sin x\right) dx$

$= \int x^3 dx + \int \sin x\, dx$

$= \frac{1}{4}x^4 + (-\cos x + C)$

$= \frac{1}{4}x^4 - \cos x + C$

2) Tentukan intrgral tak tentu

$$\int (\sin x - \cos x)^2 dx$$

Penyelesaian :

Mari kita perhatikan bentuk persamaan awalnya, yaitu:

$(\sin x - \cos x)^2$

$= sin^{\,2} x - 2\sin x \cos x + \ cos^2 x$

Dikarenakan sesuai sifat-sifat trigonometri :

$$sin^2 x + cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

Maka

$= sin^{\,2} x - 2\sin x \cos x + \ cos^2 x$

$= (sin^{\,2} x + \ cos^2 x) - (2\sin x \cos x)$

$= 1 - \sin 2x$

Sehingga :

$$\int (\sin x - \cos x)^2 dx = \int (1 - \sin 2x)\, dx$$

$$= \int 1\, dx - \int \sin 2x\, dx$$

$$= x - \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$$

$$= x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Selanjutnya kita akan menggunakan metode substitusi dan apabila dibarengi dengan pemakaian kesamaan trigonometri yang tepat, maka kita akan dapat melakukan pengintegralan dalam banyak bentuk pada fungsi trigonometri.
Ada 5 (lima) jenis integral tak tentu yang sering muncul, yaitu :

(1) $\int sin^n x\, dx$ dan $\int cos^n x\, dx$
(2) $\int sin^m x\, .\, cos^n x\, dx$
(3) $\int tan^n x\, dx$ dan $\int cot^n x\, dx$
(4) $\int tan^m x\, .\, sec^n x\, dx$ dan $\int cot^m x\, csc^n x\, dx$
(5) $\int \sin mx \cos nx\, dx$
$\int \sin mx \sin nx\, dx$
$\int \cos mx \cos nx\, dx$

Jenis 1; ($\int sin^n x\, dx$; $\int cos^n x\, dx$)
Jika n adalah bilangan bulat positif dan ganjil, maka n dapat diubah menjadi (n-1) dan (n=1), atau n akan digenapkan ke yang terdekat. Selanjutnya substitusi dengan menggunakan kesamaan identitas :

$sin^2 x + cos^2 x = 1$ atau
$sin^2 x = 1 - cos^2 x$ atau
$cos^2 x = 1 - sin^2 x$

Akhirnya dengan substitusi tersebut didapat kesamaan antara integran dengan tanda integrasinya, sehingga dengan mudah dapat diselesaikan.

Contoh :

1) Tentukan $\int sin^5 x\ dx$

   Penyelesaian :

   Dari pertanyaan tersebut diketahui bahwa n adalah ganjil sehingga harus kita ubah menjadi genap.

   $$\int sin^5 x\ dx$$
   $$= \int sin^4 x\ .\sin x.dx$$
   $$= \int (sin^2 x)^2 .\sin x.dx$$

   Dikarenakan : $sin^2 x = 1 - cos^2 x$; maka :

   $$= \int (1 - cos^2 x)^2 .\sin x.dx$$
   $$= \int (1 - 2cos^2 x + cos^4 x).\sin x.dx$$

   Kita ingat kembali bahwa aturan diferensial pada fungsi trigonometri, bahwa :

   $y = cos\ x$
   $$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$
   $$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$
   $$d(\cos x) = -\sin x\ dx$$

   Maka kita dapat mensubstitusinya kembali. Agar memiliki tanda minus (-), maka sisi luar integral kita kali (-) dan sisi di dalam integral kita kalikan juga (-).

$$\int (1 - 2cos^2 x + cos^4 x). \sin x . dx$$
$$= -\int (1 - 2cos^2 x + cos^4 x). (-\sin x\, dx)$$
$$= -\int (1 - 2cos^2 x + cos^4 x). d(\cos x)$$
$$= -\int 1. d(\cos x) + \int 2cos^2 x\, . d(\cos x) - \int cos^4 x. d(\cos x)$$
$$= -\cos x + 2\left(\frac{1}{2+1} cos^{2+1} x\right) - \left(\frac{1}{4+1} cos^{4+1} x\right) + C$$
$$= -\cos x + \frac{2}{3} cos^3 x - \frac{1}{5} cos^5 x + C$$

2) Tentukan $\int sin^2 x\, dx$

Penyelesaian :
Dari pertanyaan tersebut diketahui bahwa n adalah genap sehingga dapat langsug dilihat pada aturan fungsi trigonometri di atas.

$$\int sin^2 x\, dx$$

Diketahui bahwa :

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$
$$= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x\ \ dx$$
$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

Diketahui bahwa :

$$\int \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx$$

$$= \frac{1}{2}[x] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right] + C$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

3) Tentukan $\int cos^4 x\ dx$

Penyelesaian :
Dari pertanyaan tersebut diketahui bahwa n adalah genap sehingga dapat langsug dilihat pada aturan fungsi trigonometri di atas.

$$\int cos^4 x\ dx = \int (cos^2 x)^2\ dx$$

Diketahui bahwa :

$$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Maka :

$$\int (cos^2 x)^2\ dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right)^2\ dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2\ dx$$

Berdasarkan sifat :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Maka :

$$= \int \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \left(\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2\right) dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right) dx$$
$$= \int \frac{1}{4}\,dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx + \int \frac{1}{4}\cos^2 2x\ \ dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\ \ dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\ \ dx$$

Berdasarkan sifat :

$$cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$$

$$a = 2x$$

Maka :

$$cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2(2x))$$

$$cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \ dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \ dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \ dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2} \ dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}\cos 4x \ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \ dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x \ dx$$

Diketahui bahwa :

$$\int \cos nx \, dx = \frac{1}{n}\sin nx$$

Maka :

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right] + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right] + C$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

$$= \frac{2x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

4) Tentukan $\int sin^4 2x\ dx$

Penyelesaian :

Dari pertanyaan tersebut diketahui bahwa n adalah genap,selanjutnya juga kita perhatikan ada fungsi x sehingga lebih memudahkan kita menggunakan substitusi.

Misalkan :

$$u = 2x$$
$$\frac{du}{dx} = 2$$
$$dx = \frac{du}{2}$$

Sehingga :

$$\int sin^4 2x\ dx = \int sin^4 u \left(\frac{du}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int sin^4 u\ .du$$
$$= \frac{1}{2}\int (sin^2 u)^2 . du$$

Dikarenakan :

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Maka :

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2u)\right)^2 .du$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1 - \cos 2u)^2\ du$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{4}(1 - 2(1)(\cos 2u) + cos^2 2u)du$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2u + \ cos^2 2u)du$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{4} - \frac{2\cos 2u}{4} + \frac{1}{4}cos^2 2u\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2u + \frac{1}{4} cos^2 2u\right) du$$
$$= \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cos 2u + \frac{1}{8} cos^2 2u\right) du$$
$$= \int \frac{1}{8} du - \int \frac{1}{4}\cos 2u \,.\, du + \int \frac{1}{8}(cos^2 2u) \,.\, du$$

Berdasarkan sifat :

$$cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$$
$$a = 2u$$

Maka :

$$cos^2 2u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2(2u))$$
$$cos^2 2u = \frac{1}{2}(1 + \cos 4u)$$

Sehingga :

$$= \int \frac{1}{8} du - \int \frac{1}{4}\cos 2u \,.\, du + \int \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}(1 + \cos 4u)\right) .\, du$$
$$= \int \frac{1}{8} du - \int \frac{1}{4}\cos 2u \,.\, du + \int \left(\frac{1}{16}(1 + \cos 4u)\right) .\, du$$
$$= \int \frac{1}{8} du - \int \frac{1}{4}\cos 2u \,.\, du + \int \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\cos 4u\right) .\, du$$
$$= \int \frac{1}{8} du - \int \frac{1}{4}\cos 2u \,.\, du + \int \frac{1}{16}\ du + \frac{1}{16}\cos 4u \,.\, du$$

Diketahui bahwa :

$$\int \cos nx\ dx = \frac{1}{n}\sin nx$$

Maka :

$$= \int \frac{1}{8} du - \int \frac{1}{4}\cos 2u \,.\, du + \int \frac{1}{16}\ du + \frac{1}{16}\cos 4u \,.\, du$$
$$= \frac{1}{8}u - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2u\right) + \frac{1}{16}u + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\sin 4u\right) + C$$
$$= \frac{1}{8}u + \frac{1}{16}u - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2u\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\sin 4u\right) + C$$

$$= \frac{2}{16}u + \frac{1}{16}u - \frac{1}{8}\sin 2u + \frac{1}{64}\sin 4u + C$$
$$= \frac{3}{16}u - \frac{1}{8}\sin 2u + \frac{1}{64}\sin 4u + C$$

Karena *:*

u = $2x$, maka :

$$= \frac{3}{16}(2x) - \frac{1}{8}\sin 2(2x) + \frac{1}{64}\sin 4(2x) + C$$
$$= \frac{6x}{16} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 8x}{64} + C$$

Jenis 2;($\int \boldsymbol{sin^m x \,.\, cos^n x\, dx}$)

Apabila *m* atau *n* ganjil positif sedangkan eksponen yang lain bilangan sembarang, maka dapat kita keluarkan *sin x* atau *cos x* dan menggunakan kesamaan $sin^2x + cos^2x = 1$.

Contoh :

1) Tentukan $\int sin^3x\ cos^{-4}x\ dx$

Penyelesaian :

Pertama sekali kita perhatikan pangkat (eksponen) yang ganjil harus kita sedarhanakan menjadi genap. Selanjutnya kita gunakan sifat-sitaf dan aturan integral pada fungsi trigonometri.

$$\int sin^3x\ cos^{-4}x\ dx$$
$$= \int (sin^2x)(\sin x)\ (cos^{-4}x)dx$$
$$= \int (sin^2x)\ (cos^{-4}x)(\sin x)dx$$

Dikarenakan :

$sin^2x = 1 - cos^2x$, maka:

$$= \int (1 - cos^2x)\ (cos^{-4}x)(\sin x)dx$$

$$= \int (cos^{-4}x - \{(cos^2 x)(cos^{-4}x)\})\,(\sin x)dx$$
$$= \int (cos^{-4}x - \{(cos^{2-4}x)\})\,(\sin x)dx$$
$$= \int (cos^{-4}x - cos^{-2}x)\,(\sin x)dx$$

Kita ingat kembali aturan diferensial pada fungsi trigonometri, bahwa :

$y = cos\ x$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$
$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$
$$d(\cos x) = -\sin x\ dx$$
$$-d(\cos x) = \sin x\ dx$$

Maka :

$$= \int (cos^{-4}x - cos^{-2}x)\,\big(-d(\cos x)\big)$$
$$= -\int (cos^{-4}x - cos^{-2}x)\,.\,d(\cos x)$$
$$= -\int cos^{-4}x.\,d(\cos x) + \int cos^{-2}x.\,d(\cos x)$$
$$= -\left[\frac{1}{-4+1}cos^{-4+1}x\right] + \left[\frac{1}{-2+1}cos^{-2+1}x\right] + C$$
$$= -\left[\frac{1}{-3}cos^{-3}x\right] + \left[\frac{1}{-1}cos^{-1}x\right] + C$$
$$= \frac{1}{3}cos^{-3}x - cos^{-1}x + C$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{cos^3 x}\right) - \frac{1}{\cos x} + C$$
$$= \frac{1}{3}sec^3 x - \sec x + C$$

2) Tentukan $\int sin^2 x\ cos^4 x\ dx$

Penyelesaian :

Pertama sekali kita perhatikan pangkat (eksponen) adalah genap. Selanjutnya kita gunakan sifat-sitaf untuk menyederhanakan fungsi tersebut dengan menggunakan substitusi.

$$\int sin^2 x\, cos^4 x\, dx$$

$$= \int (sin^2 x)(cos^2 x)^2\, dx$$

Diketahui bahwa :

$$sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Maka :

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\left(\frac{1}{2}\right)^2 (1 + \cos 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)(1 + 2\cos 2x + cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + 2\cos 2x + cos^2 2x - \cos 2x - 2cos^2 2x - cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - cos^2 2x - cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left\{1 + \cos 2x - \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) - (cos^2 2x)(\cos 2x)\right\} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left\{1 + \cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) - (1 - sin^2 2x)(\cos 2x)\right\} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left\{1 + \cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) - (\cos 2x - sin^2 2x \cos 2x)\right\} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left\{1 + \cos 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x - \cos 2x + sin^2 2x \cos 2x\right\} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left\{1 - \frac{1}{2} + \cos 2x - \cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x + sin^2 2x \cos 2x\right\} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + sin^2 2x \cos 2x\right\} dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2}\cos 4x\; dx + \int sin^2 2x \cos 2x\; dx\right]$$

Kita ingat kembali aturan diferensial pada fungsi trigonometri, bahwa :

$y = 4x$

$\frac{dy}{dx} = 4$

$\frac{d(4x)}{dx} = 4$

$dx = \frac{d(4x)}{4}$

Begitu juga untuk :

$y = \sin 2x$

$\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$

$\frac{d(\sin 2x)}{dx} = 2\cos 2x$

$d(\sin 2x) = 2\cos 2x \ \ dx$

$\frac{d(\sin 2x)}{2} = \cos 2x \ \ dx$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2}\cos 4x \ \ dx + \int sin^2 2x\,(\cos 2x \ \ dx)\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x \left(\frac{d(4x)}{4}\right) + \int sin^2 2x \left(\frac{d(\sin 2x)}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\,\big(d(4x)\big) + \frac{1}{2}\int sin^2 2x\,\big(d(\sin 2x)\big)\right]$$

Berdasarkan aturannya :

$$\int cos\,\mathrm{x}\,dx = \sin x + C$$

Maka :

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}(\sin 4x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+1} sin^{(2+1)} 2x\right)\right] + C$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}(\sin 4x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} sin^3 2x\right)\right] + C$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{6} sin^3 2x\right] + C$$

Jenis 3; ($\int \boldsymbol{tan^n x\, dx}$, $\int \boldsymbol{cot^n x\, dx}$)

Dalam penyelesaian tangen maka yang harus dikeluarkan adalah faktor $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$; sedangkan dalam penyelesaian kotangen maka yang dikeluarkan adalah faktor $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

Contoh :

3) Tentukan $\int \cot^4 x \ dx$

Penyelesaian :

Pertama sekali kita perhatikan pangkat (eksponen) adalah genap. Selanjutnya kita gunakan sifat-sitaf untuk menyederhanakan fungsi tersebut dengan menggunakan substitusi.

$$\int \cot^4 x \ dx = \int (\cot^2 x)(\cot^2 x)\, dx$$

Karena diketahui bahwa :

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

Maka :

$$= \int (\cot^2 x)(\csc^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int (\cot^2 x \csc^2 x - \cot^2 x)\, dx$$
$$= \int \cot^2 x \csc^2 x\, dx - \int (\cot^2 x)\, dx$$

Kita ingat kembali bahwa aturan diferensial pada fungsi trigonometri adalah :

$$y = \cot x$$
$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$$
$$\frac{d(\cot x)}{dx} = -\csc^2 x$$
$$d(\cot x) = -\csc^2 x \ .dx$$
$$-d(\cot x) = \csc^2 x \ .dx$$

Dan

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

Maka :

$$\int \cot^2 x \csc^2 x \, dx - \int (\cot^2 x) \, dx$$
$$= \int \cot^2 x \left(-d(\cot x)\right) - \int (\csc^2 x - 1) \, dx$$
$$= -\int \cot^2 x \;\; d(\cot x) - \int (\csc^2 x - 1) \, dx$$
$$= -\int \cot^2 x \;\; d(\cot x) - \int \csc^2 x \, dx + \int dx$$
$$= -\int \cot^2 x \;\; d(\cot x) - \int -d(\cot x) + \int dx$$
$$= -\int \cot^2 x \;\; d(\cot x) + \int d(\cot x) + \int dx$$
$$= -\left[\frac{1}{2+1} \cot^{2+1} x\right] + \cot x + x + C$$
$$= \frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + x + C$$

Jenis 4; ($\int \boldsymbol{tan^m x \; sec^{\,n} x \; dx}$, $\int \boldsymbol{cot^m x \; csc^m x \; dx}$)

Contoh soal untuk *m*=*sembarang* dan *n*=*genab*

Tentukan $\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x \, dx$

Penyelesaian :

Kita harus menyederhanakannya hingga ke pangkat 2, yaitu :

$$\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x \, dx$$
$$= \int \left(\tan^{-3/2} x\right) (\sec^2 x)(\sec^2 x) dx$$

Diketahui bahwa :

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

Maka :

$$\int \left(\tan^{-3/2} x\right)(\sec^2 x)(\sec^2 x)dx$$

$$= \int \left(\tan^{-3/2} x\right)(1 + \tan^2 x)(\sec^2 x)dx$$

$$= \int \left(\tan^{-3/2} x + \left(\tan^{-3/2} x\right)(\tan^2 x)\right)(\sec^2 x)dx$$

$$= \int \left(\tan^{-3/2} x + \left(\tan^{2-3/2} x\right)\right)(\sec^2 x)dx$$

$$= \int \left(\tan^{-3/2} x + \left(\tan^{1/2} x\right)\right)(\sec^2 x)dx$$

$$= \int \left(\tan^{-3/2} x\,(\sec^2 x) + \left(\tan^{1/2} x\right)(\sec^2 x)\right)dx$$

$$= \int \left(\tan^{-3/2} x\right)\sec^2 x\ dx + \int \left(\tan^{1/2} x\right)\sec^2 x\ dx$$

Kita ingat kembali bahwa aturan diferensial pada fungsi trigonometri adalah :

$$y = \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x\ dx$$

Maka :

$$= \int \left(\tan^{-3/2} x\right)\sec^2 x\ dx + \int \left(\tan^{1/2} x\right)\sec^2 x\ dx$$

$$= \int \left(\tan^{-3/2} x\right)d(\tan x) + \int \left(\tan^{1/2} x\right)d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\tan^{-3/2+1} x + \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\tan^{1/2+1} x + C$$

$$= \frac{1}{\frac{-3+2}{2}}\tan^{\frac{-3+2}{2}} x + \frac{1}{\frac{1+2}{2}}\tan^{\frac{1+2}{2}} x + C$$

$= \frac{1}{-\frac{1}{2}} \tan^{-1/2} x + \frac{1}{\frac{3}{2}} \tan^{3/2} x + \mathrm{C}$

$= -2 \tan^{-1/2} x + \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + \mathrm{C}$

Jenis 5; ($\int \boldsymbol{\sin mx \ \cos nx\, dx}$, $\int \boldsymbol{\sin mx \sin nx\, dx}$, $\int \boldsymbol{\cos mx \cos nx\, dx}$)

Untuk menyelesaikan integral tersebut pada jenis 5 ini kita akan menggunakan persamaan di bawah ini.

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)\, x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

Contoh soal :

1. Tentukan $\int \sin 2x \cos 3x \ dx$

   Penyelesaian :

   Untuk mengerjakannya kita bisa langsung menggunakan persamaa di atas, yaitu :

   $$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)\, x + \sin(m-n)x]$$

   Maka :

   $\int \sin 2x \cos 3x \ dx$

   $= \int \frac{1}{2}[\sin(2+3)\, x + \sin(2-3)x]dx$

   $= \int \frac{1}{2}[\sin 5x + \sin(-x)]dx$

   $= \int \frac{1}{2}\sin 5x\, dx + \int \frac{1}{2}\sin(-x)\, dx$

   $= \frac{1}{2}\int \sin 5x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin(-x)\, dx$

   $= \frac{1}{2}\int \sin 5x\, dx - \frac{1}{2}\int \sin x\, dx$

Kita ingat kembali aturan diferensial bahwa :

$y = 5x$

$\frac{dy}{dx} = 5$

$\frac{d(5x)}{dx} = 5$

$\frac{d(5x)}{5} = dx$

Maka kita akan mensubstitusi *dx,* sehingga menjadi :

$$= \frac{1}{2}\int \sin 5x \, dx - \frac{1}{2}\int \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 5x \left(\frac{d(5x)}{5}\right) - \frac{1}{2}\int \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)\int \sin 5x \, d(5x) - \frac{1}{2}\int \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{10}\int \sin 5x \, d(5x) - \frac{1}{2}\int \sin x \, dx$$

Karena diketahui bahwa :

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

Maka :

$$= \frac{1}{10}\int \sin 5x \, d(5x) - \frac{1}{2}\int \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{10}(-\cos 5x) - \frac{1}{2}(-\cos x) + C$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

2. Tentukan $\int \sin 2x \sin 3x \; dx$

   Penyelesaian :

   Untuk menyelesaikannya kita gunakan persamaan di atas yaitu :

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$$

Maka :

$$\int \sin 2x \sin 3x \; dx$$

$$= \int -\frac{1}{2}[\cos(2+3)x - \cos(2-3)x]\, dx$$

$$= \int -\frac{1}{2}[\cos 5x - \cos(-x)]\, dx$$

$$= \int -\frac{1}{2}[\cos 5x + \cos x]\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos 5x\, dx + \int \left(-\frac{1}{2}\right) \cos x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos 5x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos x\, dx$$

Kita ingat kembali aturan diferensial bahwa :

$$y = 5x$$

$$\frac{dy}{dx} = 5$$

$$\frac{d(5x)}{dx} = 5$$

$$\frac{d(5x)}{5} = dx$$

Maka kita lakukan substitusi :

$$= -\frac{1}{2}\int \cos 5x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos 5x \left(\frac{d(5x)}{5}\right) - \frac{1}{2}\int \cos x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)\int \cos 5x\, d(5x) - \frac{1}{2}\int \cos x\, dx$$

$$= -\frac{1}{10}\int \cos 5x\, d(5x) - \frac{1}{2}\int \cos x\, dx$$

Karena diketahui integral dari :

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Maka :

$$= -\frac{1}{10}\int \cos 5x \, d(5x) - \frac{1}{2}\int \cos x \, dx$$

$$= -\frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{2}\sin x + C$$

3. Tentukan $\int \cos 3x \cos 2x \;\; dx$

   Penyelesaian :

   Untuk menyelesaikannya kita gunakan persamaan berikut.

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

   Maka :

$$\int \cos 3x \cos 2x \;\; dx$$

$$= \int \frac{1}{2}[\cos(3+2)x + \cos(3-2)x]dx$$

$$= \int \frac{1}{2}[\cos 5x + \cos x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 5x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos x \, dx$$

   Kita ingat kembali aturan diferensial bahwa :

$$y = 5x$$

$$\frac{dy}{dx} = 5$$

$$\frac{d(5x)}{5} = dx$$

   Maka :

$$= \frac{1}{2}\int \cos 5x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 5x \left(\frac{d(5x)}{5}\right) + \frac{1}{2}\int \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)\int \cos 5x\,.\,d(5x) + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx$$
$$= \frac{1}{10}\int \cos 5x\,.\,d(5x) + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx$$

Kita ketahui bahwa :
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

Maka :
$$= \frac{1}{10}\int \cos 5x\,.\,d(5x) + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx$$
$$= \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

C. LATIHAN

1. Tentukan : $\int \tan^5 x\,dx$
   Kunci jawaban :
   $$\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$$
2. Tentukan : $\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\,dx$
   Kunci jawaban :
   $$\frac{2}{3}\sec^{3/2} x + 2\sec^{-1/2} x + C$$
3. Tentukan : $\int \sin 3x \cos 2x\;\;dx$
   Kunci jawaban :
   $$-\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$$
4. Tentukan : $\int \sin 4x \sin 2x\;\;dx$

Kunci jawaban :

$$-\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

5. Tentukan : $\int \cos 2x \cos 4x \ dx$
   Kunci jawaban :

$$\frac{1}{12}\sin 6x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

D. TUGAS

Hitunglah integral berikut ini.

1. $\int \sin^4 5x \ dx$
2. $\int \sin^7 3x \cos^2 3x \ dx$
3. $\int \sin 4x \cos x \ dx$
4. $\int \sin 2x \sin x \ dx$
5. $\int \cos 3x \cos x \ dx$

BAB VII

PENGINTEGRALAN PARSIAL

BAB VII. PENGINTEGRALAN PARSIAL

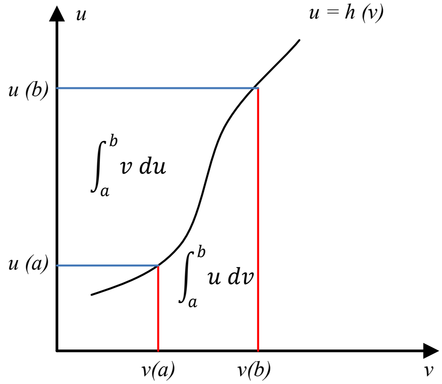
A. PENDAHULUAN

Pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami pengertian dan bentuk dari integral parsial.
2. Menyelesaikan integral dengan teknik pengintegralan parsial.
3. Menyelesaikan pengintegralan parsial integral tak tentu.
4. Menyelesaikan pengintegralan parsial integral tentu.

B. PENYAJIAN MATERI

Integral parsial merupakan salah satu cara atau teknik pengintegralan yang apabila pengintegralan dengan metode substitusi dan metode lainnya tidak berhasil dilakukan. Metode ini didasarkan pada proses pengintegralan dengan menggunakan rumus turunan hasil kali dua fungsi.



Gambar 7.1 Arti geometri pengintegralan parsial

Pada gambar 7.1 diatas dapat kita perhatikan bahwa untuk mencari luas daerah dari

$$\int_a^b u\,dv$$

dapat dituliskan dengan :

$$\int_a^b u\,dv = u(b).v(b) - u(a).v(a) - \int_a^b v\,du$$

Andaikan $u=u(x)$ dan $v=v(x)$, maka :

$$D_x[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

Dengan mengintegralkan masing-masing ruas kiri dan kanan dari persamaan tersebut, maka dapat kita peroleh :

$$u(x)v(x) = \int u(x)v'x\,dx + \int v(x)u'(x)dx$$

atau :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

Dikarenakan $dv=v'(x)$ dan $du=u'(x)$, maka persamaan terakhir dapat kita tuliskan sebagai berikut.

Pengintegralan Parsial Integral Tak Tentu

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Pengintegralan Parsial Integral Tentu

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Syarat umum yang harus dipenuhi pada integral parsial adalah sebagai berikut:

a. Pilih fungsi yang paling sederhana untuk dipakai sebagai *"u"*agar kita dapat menentukan *"du"*.
b. Bagian yang dipilih sebagai *"dv"* harus dapat diintegralkan untuk mencari *"v"*.
c. $\int v.du$ tidak boleh lebih sulit daripada $\int u.dv$
d. Substitusi kedalam rumus dari integral parsial.

Contoh :

1) Tentukan $\int 2x(3x-5)^6 dx$

Penyelesaian :

(1) Pilih fungsi yang paling sederhana untuk dipakai sebagai *"u"* agar kita dapat menentukan *"du"*.

$$u = 2x$$
$$\frac{du}{dx} = 2$$
$$du = 2.dx$$

(2) Bagian yang dipilih sebagai *"dv"* harus dapat diintegralkan untuk mencari *"v"*.

$$dv = (3x-5)^6 dx$$
$$\int dv = \int (3x-5)^6 dx$$
$$v = \int (3x-5)^6 dx$$

Untuk mencari integral dari v maka kita gunakan aturan substitusi.

Misal :

$$a = 3x-5$$
$$\frac{da}{dx} = 3$$
$$dx = \frac{da}{3}$$

Maka :

$$v = \int (3x-5)^6 dx$$
$$v = \int (a)^6 \left(\frac{da}{3}\right)$$
$$v = \frac{1}{3}\int (a)^6 (da)$$
$$v = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{7}a^7\right] + C1$$

$$v = \frac{1}{21}a^7 + C1$$
$$v = \frac{1}{21}(3x-5)^7 + C1$$

(3) Substitusi kedalam rumus dari integral parsial.
Dari perhitungan diperoleh :

$$u = 2x$$
$$dv = (3x-5)^6 dx$$
$$v = \frac{1}{21}(3x-5)^7 + C1$$
$$du = 2.dx$$

Maka :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int 2x(3x-5)^6 dx$$
$$= (2x)\left(\frac{1}{21}(3x-5)^7 + C1\right) - \int \left[\frac{1}{21}(3x-5)^7\right](2.dx)$$
$$= \frac{2x}{21}(3x-5)^7 + C1 - \frac{2}{21}\int (3x-5)^7 dx$$

Untuk mencari $\int (3x-5)^7 dx$ di atas kita harus melakukan aturan substitusi kembali, yaitu :
Misal :

$$b = 3x - 5$$
$$\frac{db}{dx} = 3$$
$$dx = \frac{db}{3}$$

Maka :

$$\int (3x-5)^7 dx$$
$$= \int a^7 \left(\frac{db}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\int a^7 db$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}a^8\right] + C2$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}(3x-5)^8\right] + C2$$

Sehingga :
$$= \frac{2x}{21}(3x-5)^7 + C1 - \frac{2}{21}\int (3x-5)^7 dx$$
$$= \frac{2x}{21}(3x-5)^7 + C1 - \frac{2}{21}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}(3x-5)^8\right] + C2\right]$$
$$= \frac{2x}{21}(3x-5)^7 + C1 - \frac{2}{504}(3x-5)^8 + C2$$

Dikarenakan C1 dan C2 adalah konstanta, maka :
$$= \frac{2x}{21}(3x-5)^7 - \frac{2}{504}(3x-5)^8 + C$$
$$= \frac{2x}{21}(3x-5)^7 - \frac{1}{252}(3x-5)^8 + C$$

2) Tentukan $\int 2x \cos x \, dx$
Penyelesaian :
Misal :
$u = 2x$
$\frac{du}{dx} = 2$
$du = 2dx$

$dv = \cos x \, dx$
$\int dv = \int \cos x \; dx$
$v = \sin x \; + C1$
Maka :
$\int u \, dv = uv - \int v \, du$
$\int 2x \cos x \, dx$
$= (2x)(\sin x \; + C1) - \int \sin x \; (2dx)$

$$= 2x\sin x + C1 - 2\int \sin x \ dx$$
$$= 2x\sin x + C1 - 2(-\cos x) + C2$$
$$= 2x\sin x + 2\cos x + C$$

3) Tentukan $\int \frac{x}{\sqrt{5x+7}} dx$

Penyelesaian :
Misal :
$u = x$
$du = dx$

$$dv = \frac{1}{\sqrt{5x+7}} dx$$
$$dv = \frac{1}{(5x+7)^{\frac{1}{2}}} dx$$
$$dv = (5x+7)^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$\int dv = \int (5x+7)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Kita misalkan kembali :
$a = 5x + 7$
$$\frac{da}{dx} = 5$$
$$dx = \frac{da}{5}$$

Maka :
$$v = \int a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{da}{5}\right)$$
$$v = \frac{1}{5}\int a^{-\frac{1}{2}} da$$
$$v = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} a^{-\frac{1}{2}+1} + C\right]$$
$$v = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} + C\right]$$

$$v = \frac{1}{5}\left[2a^{\frac{1}{2}} + C\right]$$
$$v = \frac{1}{5}\left[2(5x+7)^{\frac{1}{2}} + C\right]$$
$$v = \frac{2}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}} + C$$

Subsitutsi ke rumus :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{5x+7}}\,dx = x\left(\frac{2}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}} + C1\right) - \int \left(\frac{2}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= \frac{2x}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}} + C1 - \frac{2}{5}\int (5x+7)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

Kita misalkan kembali untuk menyelesaikan bagian yang masih ada integralnya.

Misal :

$$b = 5x + 7$$
$$\frac{db}{dx} = 5$$
$$dx = \frac{db}{5}$$
$$\int (5x+7)^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \int (b)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{db}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{5}\int (b)^{\frac{1}{2}}\,db$$
$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\,b^{\frac{1}{2}+1}\right] + C$$
$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}\,b^{\frac{3}{2}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}\right] + C$$
$$= \frac{2}{15}(5x+7)^{\frac{3}{2}} + C$$

Selanjutnya kita substitusi kembali ke fungsi di atas :

$$= \frac{2x}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}} + C1 - \frac{2}{5}\int (5x+7)^{\frac{1}{2}}\, dx$$
$$= \frac{2x}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}} + C1 - \frac{2}{5}\left[\frac{2}{15}(5x+7)^{\frac{3}{2}}\right] + C2$$
$$= \frac{2x}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}} + C1 - \frac{4}{75}(5x+7)^{\frac{3}{2}} + C2$$
$$= \frac{2x}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{75}(5x+7)^{\frac{3}{2}} + C$$

4) Tentukan $\int_1^2 \ln x \, dx$

Penyelesaian :

Misal :

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$du = \left(\frac{1}{x}\right) dx$

$dv = dx$

$v = x$

Kita substitusikan ke rumus integral parsial :

$$\int_a^b u\, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\, du$$
$$\int_1^2 \ln x\, dx = [\ln x\,(x)]_1^2 - \int_1^2 x\left(\left(\frac{1}{x}\right) dx\right)$$
$$= [\mathrm{x} \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx$$
$$= \{(2\ln 2) - (1 \ln 1)\} - [x]_1^2$$
$$= \{(2\ln 2) - (1(0))\} - \{2 - 1\}$$
$$= 2\ln 2 - 1$$

5) Tentukan $\int x \cos x \, dx$

Penyelesaian :

Misal :

$u = x$

$du = dx$

$dv = \cos x \, dx$

$\int dv = \int \cos x \, dx$

$v = \sin x$

Kita substitusikan ke rumus integral parsial, maka :

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$

$= x \sin x - [-\cos x] + C$

$= x \sin x + \cos x + C$

6) Hitunglah $\int x^2 \sin x \, dx$

Penyelesaian :

Misal :

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$du = 2x \, dx$

$dv = \sin x \, dx$

$\int dv = \int \sin x \, dx$

$v = -\cos x$

Kita substitusikan ke rumus integral parsial :

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$\int x^2 \sin x \, dx = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) \, (2x \, dx)$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \ \cos x \, dx$$

Pada contoh nomor 5 diatas telah di peroleh bahwa :

$$\int x \ \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

Maka :

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \ \cos x \, dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2[x \sin x + \cos x + C]$$
$$= x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + 2C$$
$$= x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + K$$

C. LATIHAN

Tentukan integral berikut ini menggunakan teknik pengintegralan parsial.

1. $\int 2x\,(2x+4)^3 dx$

   Kunci jawaban :

   $$\frac{x}{4}(2x+4)^4 - \frac{1}{40}(2x+4)^5 + C$$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+2}} dx$

   Kunci jawaban :

   $$x(2x+2)^{1/2} - \frac{1}{3}(2x+2)^{3/2} + C$$

3. $\int x\sqrt{2x+1}\, dx$

   Kunci jawaban :

   $$\frac{x}{3}(2x+1)^{3/2} - \frac{1}{15}(2x+1)^{5/2} + C$$

D. TUGAS

Selesaikan integral di bawah ini.

1. $\int 3x\,(3x-1)^3 dx$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}} dx$
3. $\int 2x\sqrt{2x-3}\, dx$

BAB VIII

PENGINTEGRALAN FUNGSI RASIONAL

BAB VIII. PENGINTEGRALAN FUNGSI RASIONAL

A. PENDAHULUAN

Pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami pengertian dan bentuk dari pengintegralan fungsi rasional.
2. Menyelesaikan pengintegralan fungsi rasional.

B. PENYAJIAN MATERI

Menurut definisi suatu fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi suku banyak (polinom).

Suatu fungsi $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dimana *f(x)* dan *g(x)* merupakan polinom maka fungsi *F(x)* disebut pecahan rasional.

Jika derajat *f(x)* <*g(x);* maka fungsi *F(x)* disebut sebagai fungsi rasional nyata atau fungsi rasional sejati.

Jika derajat *f(x)* >*g(x);* maka fungsi *F(x)* disebut sebagai fungsi rasional tak nyata atau fungsi rasional tidak sejati.

Integral rasional dapat diselesaikan dengan cara melihat akar-akar dari fungsi *g(x)*.

Ada 4 kemungkinan akar dari *g(x)* yaitu :

(1) Akar-akarnya riil berlainan atau mempunyai faktor linear yang berbeda.

$$g(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots \ldots (x - a_n)$$

Maka :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x - a_1)} + \frac{B}{(x - a_2)} + \frac{C}{(x - a_3)} + \cdots + \frac{N}{(x - a_n)}$$

(2) Akar-akarnya berupa faktor linear yang berulang.

$$g(x) = (ax + b_1)(ax + b_2)^2(ax + b_3)^3 \ldots \ldots (ax + b_n)^m$$

Maka :

$$\frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$\frac{A}{(ax + b_1)} + \frac{B}{(ax - b_2)} + \frac{C}{(ax - b_2)^2} + \frac{D}{(ax - b_3)} + \frac{E}{(ax - b_3)^2} + \frac{F}{(ax - b_3)^3} + \cdots + \frac{N}{(x - a_n)}$$

(3) Akar-akarnya berupa faktor kuadrat yang berbeda.

$g(x) = (x - p)(x^2 - q)^2(x^2 + ax + b)$

Maka :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-p)} + \frac{Bx + C}{(x^2 - q)} + \frac{Dx + E}{(x^2 + ax + b)}$$

(4) Akar-akarnya berupa faktor kuadrat yang sama.

$g(x) = (x - a)^2(x^2 + ax + b)^2$

Maka :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + ax + b)} + \frac{Ex + F}{(x^2 + ax + b)^2}$$

Contoh :

1) Tentukan $\int \frac{(x+1)}{(x^2-4x-12)} dx$

Penyelesaian :

$f(x) = (x + 1)$

$g(x) = (x^2 - 4x - 12)$

Selanjutkan kita melakukan pemfaktoran untuk *g(x)*.

$g(x) = (x^2 - 4x - 12) = (x - 6)(x + 2)$

Sesuai ketentuan pada poin 1 yaitu :

$g(x) = (x - a_1)(x - a_2)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x - a_1)} + \frac{B}{(x - a_2)}$$

Maka :

$$\int \frac{(x+1)}{(x^2 - 4x - 12)} dx$$

$$= \int \left(\frac{A}{(x-6)} + \frac{B}{(x+2)}\right) dx$$

$$= \int \left\{\left(\frac{A}{(x-6)}\right)\left(\frac{(x+2)}{(x+2)}\right) + \frac{B}{(x+2)}\left(\frac{(x-6)}{(x-6)}\right)\right\} dx$$

$$= \int \left\{\left(\frac{A(x+2)}{(x-6)(x+2)}\right) + \left(\frac{B(x-6)}{(x-6)(x+2)}\right)\right\} dx$$

$$= \int \frac{A(x+2) + B(x-6)}{(x-6)(x+2)} dx$$

$$= \int \frac{Ax + 2A + Bx - 6B}{(x-6)(x+2)} dx$$
$$= \int \frac{Ax + Bx + 2A - 6B}{(x-6)(x+2)} dx$$
$$= \int \frac{(A+B)x + 2A - 6B}{(x-6)(x+2)} dx$$

Sehingga kita telah memperoleh persamaan :

$$\int \frac{(x+1)}{(x^2 - 4x - 12)} dx = \int \frac{(A+B)x + 2A - 6B}{(x-6)(x+2)} dx$$

Dikarenakan penyebutnya telah sama, maka kita mengambil persamaan bagian pembilangnya saja, yaitu :

$x + 1 = (A+B)x + 2A - 6B$
$(A+B)x - x = -2A + 6B + 1$

Dari persamaan diatas kita dapat mencari nilai A dan B dengan jalan substitusi, yaitu :

$(A+B)x - x = 0$
$(A+B)x = x$
$A + B = \frac{x}{x}$
$A + B = 1$
$A = 1 - B$

$-2A + 6B + 1 = 0$
$-2A + 6B = -1$
$-2(1 - B) + 6B = -1$
$-2 + 2B + 6B = -1$
$8B = -1 + 2$
$8B = 1$
$B = \frac{1}{8}$
$A + B = 1$
$A + \frac{1}{8} = 1$

$A = 1 - \frac{1}{8}$

$A = \frac{7}{8}$

Sekarang kita substitusikan kembali ke persamaan awal, yaitu :

$$\int \frac{(x+1)}{(x^2-4x-12)}dx = \int \left(\frac{A}{(x-6)} + \frac{B}{(x+2)}\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{\frac{7}{8}}{(x-6)} + \frac{\frac{1}{8}}{(x+2)}\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{7}{8(x-6)} + \frac{1}{8(x+2)}\right)dx$$

$$= \frac{7}{8}\int \frac{1}{(x-6)}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x+2)}dx$$

Kita ingat kembali bahwa aturan dari integral:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

Maka :

$$= \frac{7}{8}\int \frac{1}{(x-6)}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x+2)}dx$$

$$= \frac{7}{8}\ln|x-6| + \frac{1}{8}\ln|x+2| + C$$

2) Tentukan $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx$

Penyelesaian :

$f(x) = (x-1)$

$g(x) = (x^3 - x^2 - 2x)$

Selanjutkan kita melakukan pemfaktoran untuk *g(x)*.

$(x^3 - x^2 - 2x) = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1)$

Maka:

$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}dx$$

$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+1)}dx$$

Selanjutnya kita samakan penyebutnya, yaitu :

$$\int \left\{\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)}\frac{C}{(x+1)}\right\}dx$$

$$= \int \left\{\frac{A}{x}\left(\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)}\right) + \frac{B}{(x-2)}\left(\frac{x(x+1)}{x(x+1)}\right) + \frac{C}{(x+1)}\left(\frac{x(x-2)}{x(x-2)}\right)\right\}dx$$

$$= \int \left\{\frac{A(x-2)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x-2)}{x(x-2)(x+1)}\right\}dx$$

Maka:

$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx = \int \left\{\frac{A(x-2)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x-2)}{x(x-2)(x+1)}\right\}dx$$

Dikarenakan penyebutnya telah sama, maka kita mengambil persamaan bagian pembilangnya saja, yaitu :

$x - 1 = A(x-2)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x-2)$
$x - 1 = A(x^2 + x - 2x - 2) + B(x^2 + x) + C(x^2 - 2x)$
$x - 1 = A(x^2 - x - 2) + B(x^2 + x) + C(x^2 - 2x)$
$x - 1 = Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 2Cx$
$x - 1 = Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 - Ax + Bx - 2Cx - 2A$
$x - 1 = (A + B + C)x^2 + (B - A - 2C)x - 2A$

Dari persamaan tersebut dapat kita pilah masing-masing untuk sisi kiri dan kanan agar kita memperoleh nilai A, B dan C yaitu :

- $-2A = -1$
  $A = \frac{-1}{-2}$
  $A = \frac{1}{2}$
- $(A + B + C)x^2 = 0$
  $A + B + C = \frac{0}{x^2}$
  $A + B + C = 0$

$$\frac{1}{2} + B + C = 0$$
$$B + C = -\frac{1}{2}$$

- $(B - A - 2C)x = x$

$$B - A - 2C = \frac{x}{x}$$
$$B - A - 2C = 1$$
$$B - \frac{1}{2} - 2C = 1$$
$$B - 2C = 1 + \frac{1}{2}$$
$$B - 2C = \frac{3}{2}$$

Selanjutnya kita kurang kan 2 persamaan agar memperoleh nilai C, yaitu :

$$\begin{array}{l} B + C = -\frac{1}{2} \\ B - 2C = \frac{3}{2} \\ \hline \end{array} -$$

$$3C = -\frac{4}{2}$$
$$3C = -2$$
$$C = -\frac{2}{3}$$

$$A + B + C = 0$$
$$\frac{1}{2} + B + \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$
$$B = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$
$$B = \frac{4 - 3}{6}$$
$$B = \frac{1}{6}$$

Selanjutnya substitusi ke persamaan awal, yaitu :

$$\int \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{(x - 2)} + \frac{C}{(x + 1)} dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{x} dx + \int \frac{\frac{1}{6}}{(x-2)} dx + \int \frac{-\frac{2}{3}}{(x+1)} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1} dx$$
$$= \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{2}{3} \ln|x+1| + C$$

3) Tentukan $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx$

Penyelesaian :

$f(x) = (3x-1)$

$g(x) = (x^2 - x - 6)$

Selanjutkan kita melakukan pemfaktoran untuk *g(x)*.

$(x^2 - x - 6) = (x+2)(x-3)$

Sesuai ketentuan pada poin 1 yaitu :

$g(x) = (x + a_1)(x - a_2)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x+a_1)} + \frac{B}{(x-a_2)}$$

Untuk memudahkan kita menyelesaikannya lebih baik kita akan selesaikan persamaannya diluar integral dahulu yaitu :

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-3)}$$

Selanjutnya kita akan menyamakan penyebutnya.

$$\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-3)}$$
$$= \left(\frac{A}{(x+2)} \frac{(x-3)}{(x-3)}\right) + \left(\frac{B}{(x-3)} \frac{(x+2)}{(x+2)}\right)$$
$$= \left(\frac{A(x-3)}{(x+2)(x-3)}\right) + \left(\frac{B(x+2)}{(x+2)(x-3)}\right)$$
$$= \frac{A(x-3) + B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$
$$= \frac{Ax - 3A + Bx + 2B}{(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{Ax + Bx - 3A + 2B}{(x+2)(x-3)}$$
$$= \frac{(A+B)x - 3A + 2B}{(x+2)(x-3)}$$

Sehingga kita telah memperoleh persamaan :

$$\frac{3x-1}{x^2 - x - 6} = \frac{(A+B)x - 3A + 2B}{(x+2)(x-3)}$$

Dikarenakan penyebutnya telah sama, maka kita mengambil persamaan bagian pembilangnya saja, yaitu :

$$3x - 1 = (A+B)x - 3A + 2B$$
$$(A+B)x - 3x = 3A - 2B - 1$$

Dari persamaan diatas kita dapat mencari nilai A dan B dengan jalan substitusi, yaitu :

$$(A+B)x - 3x = 0$$
$$(A+B)x = 3x$$
$$A + B = \frac{3x}{x}$$
$$A + B = 3$$
$$A = 3 - B$$

$$3A - 2B - 1 = 0$$
$$3A - 2B = 1$$
$$3(3-B) - 2B = 1$$
$$9 - 3B - 2B = 1$$
$$9 - 5B = 1$$
$$-5B = 1 - 9$$
$$-5B = -8$$
$$B = \frac{-8}{-5}$$
$$B = \frac{8}{5}$$

$$A + B = 3$$
$$A + \frac{8}{5} = 3$$

$$A = 3 - \frac{8}{5}$$
$$A = \frac{15 - 8}{5}$$
$$A = \frac{7}{5}$$

Sekarang kita substitusikan kembali ke persamaan awal, yaitu :

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6} dx = \int \frac{A}{(x + 2)} + \frac{B}{(x - 3)} dx$$
$$= \int \frac{\frac{7}{5}}{(x + 2)} + \frac{\frac{8}{5}}{(x - 3)} dx$$

Kita ingat kembali bahwa aturan dari integral:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

Maka :

$$\int \frac{\frac{7}{5}}{(x + 2)} + \frac{\frac{8}{5}}{(x - 3)} dx$$
$$= \frac{7}{5} \int \frac{1}{(x + 2)} dx + \frac{8}{5} \int \frac{1}{(x - 3)} dx$$
$$= \frac{7}{5} \ln|x + 2| + \frac{8}{5} \ln|x - 3| + C$$

C. LATIHAN

Tentukan integral berikut menggunakan metode pengintegralan fungsi rasional.

1. $\int \frac{2x+3}{x^2-9} dx$

   Kunci Jawaban :

$$\frac{1}{2} \ln|x - 3| + \frac{3}{2} \ln|x + 3| + C$$

2. $\int \frac{x-1}{x^2+3x-4}$

Kunci Jawaban :

$$\frac{9}{5}\ln|x+4| - \frac{4}{5}\ln|x-1| + C$$

3. $\int \frac{3x-2}{x^2+3x-10}$

Kunci Jawaban :

$$\frac{17}{7}\ln|x+5| + \frac{4}{7}\ln|x-2| + C$$

D. TUGAS

Tentukan integral berikut menggunakan metode pengintegralan fungsi rasional.

1. $\int \frac{5x+7}{x^2-9}\,dx$
2. $\int \frac{x+3}{x^2+3x-4}\,dx$
3. $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+4}\,dx$

BAB IX

LIMIT FUNGSI BENTUK TAK TENTU YANG LAIN

BAB IX. LIMIT FUNGSI BENTUK TAK TENTUYANG LAIN

A. PENDAHULUAN

Pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami pengertian dan bentuk limit fungsi bentuk tak tentu 0/0.
2. Memahami pengertian dan bentuk limit fungsi bentuk tak tentu ∞/∞.
3. Memahami pengertian dan bentuk limit fungsi bentuk tak tentu 0.∞.
4. Memahami pengertian dan bentuk limit fungsi bentuk tak tentu ∞-∞.

B. PENYAJIAN MATERI

Diawal kita perlu memahami terlebih dahulu mengenai konsep bilangan nol (0) dan konsep tak-hingga (∞). Bilangan nol kita sudah sangat mengenal dengan baik pada matematika dan sifat-sifatnya dimana setiap bilangan apabila dikalikan dengan nol maka hasilnya adalah nol.

Namun tidak demikian apabila bilangan dibagi dengan nol (a/0) maka akan menghasilkan bilangan tak-hingga (∞). Konsep bilangan tak-hingga adalah konsep yang membingungkan untuk orang awam dan juga matematikawan sekalipun. Maka dari itu kita harus sangat memperhatikan apa pengertian dan batasan dari "tak-hingga" yang kita bahas ini.

Tak-hingga adalah bukan bilangan (dalam hal ini bukan bilangan rill maupun komplek). Konsep tak-hingga merupakan suatu kecenderungan yang terus menerus membesar (baik ke arah positif maupun ke arah negatif). Jadi kita dapat menyatakan suatu fungsi tersebut terus menerus membesar menuju tak-hingga, namun kita tidak dapat menyatakannya menjadi bahwa suatu fungsi itu adalah tak-hingga.

Berapa $\frac{0}{0}=?$, mungkin kebanyakan orang awam akan menjawab 1 dikarenakan pembilang dan penyebutnya adalah sama. Tetapi sebenarnya alasan itu tidaklah tepat. Bentuk $\frac{0}{0}$ merupakan bentuk tak-tentu karena tidak mendefinisikan sebuah bilangan, dengan kata lain bentuk $\frac{0}{0}$ bukan bilangan atau tidak terdefinisi.

Mengapa $\frac{0}{0}$ disebut bentuk tak tentu? Hal ini dikarenakan ada beberapa fungsi yang nilai fungsinya $\frac{0}{0}$ tetapi nilai limitnya tidak tunggal, ada yang limitnya bilangan rill, tak-hingga, negatif tak-hingga atau limitnya tidak ada.

Di bawah ini ada tiga masalah limit yang sering kita jumpai, yaitu :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ketiga limit tersebut memiliki penampilan yang sama, yaitu apabila diselesaikan maka dalam ketiga limit tersebut pembilang dan penyebutnya berlimit nol (0). Apabila kita menghitung limit tersebut dengan menggunakan penarikan limit untuk hasil bagi, maka akan kita peroleh jawaban yang tidak terdefinisi yaitu ${}^{0}/_{0}$. Memang aturan aturan tersebut hanya berlaku apabila limit tersebut memiliki penyebut yang bukan nol (0). Kita tidak mengatakan bahwa limit di atas tersebut tidak ada, namun kita hanya mengatakan bahwa limit tersebut tidak dapat ditentukan dengan aturan hasil bagi limit.

a. Bentuk 0/0

Untuk penyelesaiannya marilah kita merubah bentuk aljabar sehingga bentuknya tidak lagi 0/0. Salah satu teorema yang memungkinkan adalah menggunakan aturan L 'Hôpital's.

Aturan L'HÔPITAL *(baca loupital)* untuk bentuk 0/0.

Andaikan

$$\lim_{x \to u} f(x) = \lim_{x \to u} g(x) = 0$$

Apabila lim $[f'(x)/g'(x)]$ ada, baik ia terhingga atau tak-terhingga (jadi bilangan terhingga *L*,∞, atau -∞), maka :

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Disini *u* dapat mewakilkan sembarang simbol a, a^-, a^+, -∞ atau +∞.

Pembuktiannya kita dapat menyelesaikan limit berikut ini, yaitu :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{3+3}{3+2} = \frac{6}{5}$$

Menggunakan Aturan L'HÔPITAL *(baca loupital)* untuk bentuk 0/0, yaitu :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$$

Pertama yang kita lakukan adalah mendeferensialkan fungsi *f(x)* dan *g(x)* diatas, yaitu :

$f(x) = x^2 - 9$

$f'(x) = 2x$

dan

$g(x) = x^2 - x - 6$

$g^{'(x)} = 2x - 1$

Maka diperoleh :

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{2x}{2x - 1}$

$= \frac{2(3)}{2(3) - 1}$

$= \frac{6}{5}$

Terbukti bahwa dari dua penyelesaian diatas dengan hasil yang sama.

Contoh penggunaan aturan L'HÔPITAL :

1. Hitunglah

   $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

   Penyelesaian :

   Kita ketahui bahwa

   D_x [sin x] = cos x

   Maka :

   $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1}$

   $= \cos 0$

   $= 1$

2. Hitunglah

   $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

   Penyelesaian :

   Kita ketahui bahwa

   D_x [cos x] = - sin x

Maka :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-(-\sin x)}{1}$$
$$= \lim_{x \to 0} \sin x$$
$$= \sin 0$$
$$= 0$$

3. Hitungah

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \; - \; 2x}{x}$$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \; - \; 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 2}{1}$$
$$= \lim_{x \to 0} \cos x - 2$$
$$= \cos 0 - 2$$
$$= 1 - 2$$
$$= -1$$

4. Hitungah

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{x - \frac{1}{2}\pi}$$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{-\sin x}{1}$$
$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} -\sin x$$
$$= -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$$
$$= -1$$

5. Hitungah

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 2\sin x}{\tan x}$$

Penyelesaian :

Kita ketahuai bahwa :

D_x [2sin x] = 2cos x

D_x [tan x] = $\sec^2$ x

Maka :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 2\sin x}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 2\cos x}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{1 - 2(\cos 0)}{\sec^2 0}$$

$$= \frac{1 - 2(1)}{1^2}$$

$$= \frac{-1}{1}$$

$$= -1$$

6. Hitungah

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 4x - 5}$$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x \to -1} \frac{2x + 5}{2x - 4}$$

$$= \frac{2(-1) + 5}{2(-1) - 4}$$

$$= \frac{-2 + 5}{-2 - 4}$$

$$= \frac{3}{-6}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

b. Bentuk ∞/∞

Kita ketahui bahwa $a \in$ R maka :

$\frac{a}{a} = 1$ dan a x 1 = a

Dikarenakan ∞ x a = ∞, maka seharusnya $\frac{\infty}{\infty} = a$ dan ini bertentangan dengan $\frac{\infty}{\infty} = 1$ sehingga bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ disebut dengan bentuk tak tentu atau tidak terdefinisikan.

Untuk menyelesaikan limit tak tentu ini maka kita dapat menggunakan **Aturan L'HÔPITAL** ***(baca loupital)*** **untuk bentuk ∞/∞.**

Andaikan

$$\lim_{x\to u}|f(x)| = \lim_{x\to u}|g(x)| = \infty$$

Apabila $\lim[f'(x)/g'(x)]$ ada, baik ia terhingga atau tak-terhingga, maka :

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Disini u dapat mewakilkan sembarang simbol a, a^-, a^+, -∞ atau +∞.

Contoh :

1. Hitungah

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - x^2}{x^3 - 3x}$$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - x^2}{x^3 - 3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty^2}}$$

Kita ingat sifat aljabar ∞ bahwa $\frac{a}{\infty} = 0$

Maka :

$$= \frac{1-0}{1-0}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

Hal ini dapat dibuktikan penyelesaiannya juga dengan aturan L'HÔPITAL yaitu :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x}{3x^2 - 3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6x - 2}{6x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{6}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 1$$

$$= 1$$

2. Hitungah menggunakan aturan L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 4}$$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 4}$$

Pertama kita harus mencari

$$Dx(\sqrt{x}) = Dx\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Maka,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2\sqrt{\infty}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\infty}$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

3. Hitungah

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{2x-4}$$

Penyelesaian ini tidak dapat dilakukan dengan aturan L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{2x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\,.\,\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{2-\frac{4}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}}{2-\frac{4}{\infty}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+0}}{2-0}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

c. **Bentuk 0.∞**

Andaikan *f(x)* $\rightarrow$*0,* tetapi *g(x)* $\rightarrow \infty$. Bagaimana dengan hasil kalinya? Apakah akan menuju 0, ataukah tak berhingga atau akan menghasilkan limit baru yang lain? Semua ini akan bergantung pada masing-masing *f(x)* dan *g(x)* dalam menuju 0 maupun tak terhingga.

Untuk bentuk tak tentu ini, kita akan menghitungnya dengan pemahaman bahwa fungsi limitnya sebagai berikut.

$$\lim_{x \to c} f(x).g(x)$$

Dimana :

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0$$

dan

$$\lim_{x \to c} |g(x)| = \infty$$

Nah cara ini dapat kita manipulasi aljabarnya dengan merubah bentuk limitnya ke bentuk 0/0 karena :

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

dengan :

$f(x) \to 0$ $\qquad \frac{1}{g(x)} \to 0$

Dan ke bentuk ∞/∞
karena :

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

dengan :

$g(x) \to \infty$ $\qquad \frac{1}{|f(x)|} \to \infty$

Contoh :

1. Tentukan limit dari

   $$\lim_{x \to \pi/4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sec 2x$$

   Penyelesaian :
   Kalau kita perhatikan bahwa hasil limit di atas adalah :

   $$\lim_{x \to \pi/4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$
   $$\lim_{x \to \pi/4} |\sec 2x| = \infty$$

Sehingga limit yang akan kita cari adalah limit berbentuk tak tentu 0.∞.

Kita dapat memanipulasi atau mengubahnya menjadi bentuk $0/0$ dengan menuliskan :

$$\sec 2x = \frac{1}{\cos 2x}$$

Jadi :

$$\lim_{x\to \pi/4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sec 2x = \lim_{x\to \pi/4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\cos 2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to \pi/4} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}$$

Nah bentuk ini telah berubah menjadi bentu $0/0$.

Buktinya :

$$= \lim_{x\to \pi/4} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}$$

$$= \frac{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{0}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$$

Di sini kita sudah dapat menggunakan aturan L'Hopital :

$$\lim_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Kita cari turunan dari fungsi *f(x).*

$$y = x - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

Selanjutnya turunan dari fungsi *g(x).*

$$y = \cos 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 2x\ (2)$$
$$\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x$$

Maka :

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
$$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x} = \lim_{x \to \pi/4} \frac{1}{-2\sin 2x}$$
$$= \frac{1}{-2\sin 2\left(\pi/4\right)}$$
$$= \frac{1}{-2\sin\left(\pi/2\right)}$$
$$= \frac{1}{-2(1)}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

2. Tentukan limit dari

$$\lim_{x \to \pi} (x - \pi) \cot x$$

Penyelesaian :

Kalau kita perhatikan bahwa hasil limit di atas adalah :

$$\lim_{x \to \pi} (x - \pi) = 0$$
$$\lim_{x \to \pi} \cot x = \infty$$

Sehingga limit yang akan kita cari adalah limit berbentuk tak tentu 0.∞.

Kita dapat memanipulasi atau mengubahnya menjadi bentuk 0/0. Kita ketahui bahwa :

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

Maka :

$$\lim_{x \to \pi} (x - \pi) \cot x = \lim_{x \to \pi} (x - \pi) \left(\frac{1}{\tan x} \right)$$
$$= \lim_{x \to \pi} \frac{(x - \pi)}{\tan x}$$

Nah bentuk ini telah berubah menjadi bentu 0/0.
Buktinya :

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{(x - \pi)}{\tan x}$$
$$= \frac{(\pi - \pi)}{\tan \pi} = \frac{0}{0}$$

Di sini kita sudah dapat menggunakan aturan L'Hopital :

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Kita cari turunan dari fungsi *f(x).*

$$y = x - \pi$$
$$\frac{dy}{dx} = 1$$

Selanjutnya turunan dari fungsi *g(x).*

$$y = \tan x$$
$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

Maka :

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
$$\lim_{x \to \pi} \frac{(x - \pi)}{\tan x} = \lim_{x \to \pi} \frac{1}{\sec^2 x}$$

Dikarenakan :

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Maka :

$$\lim_{x \to \pi} \frac{1}{\sec^2 x} = \lim_{x \to \pi} \frac{1}{1/\cos^2 x}$$
$$= \lim_{x \to \pi} \cos^2 x$$
$$= \cos^2 \pi$$
$$= (-1)^2$$
$$= 1$$

3. Tentukan limit dari

$$\lim_{x \to 0} x \ln x$$

Penyelesaian :

Kalau kita perhatikan bahwa hasil limit di atas adalah :

$$\lim_{x \to 0} x = 0$$
$$\lim_{x \to 0} |\ln x| = \infty$$

Sehingga limit yang akan kita cari adalah limit berbentuk tak tentu 0.∞.

Kita dapat memanipulasi atau mengubahnya menjadi bentuk ∞/∞, yaitu :

$$\lim_{x \to 0} x \ln x$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x}$$

Di sini kita sudah dapat menggunakan aturan L'Hopital :

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Kita cari turunan dari fungsi *f(x).*

$y = \ln x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

Selanjutnya turunan dari fungsi *g(x).*

$y = \dfrac{1}{x}$

$y = x^{-1}$

$\dfrac{dy}{dx} = -x^{-1-1}$

$\dfrac{dy}{dx} = -x^{-2}$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$

Maka :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/_x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)(-x^2)$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x^2}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}(-x)$$
$$= 0$$

d. Bentuk ∞ - ∞

Limit bentuk ini akan dihitung dengan mengubah hasil limit bentuk **∞ - ∞**menjadi hasil limit bentuk ∞/∞, selanjutnya baru dihitung dengan berbagai cara.

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - g(x)\right)$$

Dimana :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

Contoh :

1. Hitunglah limit dari

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}\right)$$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}\right) \frac{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right)}$$

Untuk memudahkan penyelesaian perkalian akar maka kita gunakan permisalan, yaitu :

$a = \sqrt{x-1}$

$b = \sqrt{x}$

Maka :

$(a-b)(a+b)$

$= a^2 + ab - ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

$= \left(\sqrt{x-1}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x - 1 - x}{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right)}$$

$= \frac{-1}{\infty}$
$= 0$

2. Hitunglah limit dari
$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right)$

Penyelesaian :
$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right)$
$= \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right) \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right)}{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right)}$
$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right)\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right)}{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right)}$

Kita misalkan untuk memudahkan penyelesaian perkalian akar, yaitu :
$a = \sqrt{x^2 + 2x}$
$b = x$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
$= \left(\sqrt{x^2 + 2x} \right)^2 - x^2$
$= x^2 + 2x - x^2$

Maka :
$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right)\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right)}{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right)}$
$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right)}$
$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right)}$

Selanjutnya kita sederhanakan kembali penyebutnya.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\left(x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{\infty}\right)}+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1+0)}+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1}+1}$$

$$= \frac{2}{1+1}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

C. LATIHAN

Selesaikan soal berikut dengan menggunakan Aturan L'HÔPITAL.

1. Hitunglah

   $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$$

   Kuncin jawaban : "2"

2. Hitunglah
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 5x^2 - x - 5}{x^2 + 3x - 4}$$
Kuncin jawaban :
$$\frac{12}{5}$$

3. Hitunglah
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9}$$
Kuncin jawaban :
$$\frac{7}{6}$$

4. Hitunglah
$$\lim_{x \to 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4}$$
Kunci jawaban :
$$\frac{3}{4}$$

5. Hitunglah
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$
Kunci jawaban :
$$\frac{1}{6}$$

D. TUGAS

Selesaikan soal berikut dengan menggunakan Aturan L'HÔPITAL.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{5x^3+7x^2+5x}{3x^2+10x}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$
3. $\lim_{x \to \pi} \frac{x \sin^2 x}{\cos x + \cos 2x}$
4. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+7x+8}{2x^2-2}$
5. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3-2x^2-8x}{-x^2-2x}$

BAB X

INTEGRAL TAK WAJAR : BATAS TAK TERHINGGA

BAB X. INTEGRAL TAK WAJAR : BATAS TAK TERHINGGA

A. PENDAHULUAN

Pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami pengertian dan bentuk dari integral tak wajar batas tak terhingga.
2. Menyelesaikan permasalahan dari integral tak wajar batas tak terhingga.

B. PENYAJIAN MATERI

Integral tak wajar (improper) merupakan suatu fungsi integral yang tidak memenuhi asumsi dari integral tentu. Sehingga kita harus mengenali dengan cermat dari integral tak wajar tersebut.

Kita harus mengingat kembali definisi dari integral tentu, yaitu:

Dalam definisi integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ terdapat dua asumsi :

(1) Selang pengintegralannya [a, b] merupakan selang terhingga (bernilai).

(2) Fungsi integrannya (yang diintegralkan) merupakan fungsi terbatas.

Apabila dalam pelaksanaannya, ada kalanya salah satu atau kedua asumsi ini tidak dipenuhi, dengan demikian kita berhadapan dengan integral tak wajar.

Pada sub bab ini kita akan menjabarkan terlebih dahulu integral tak wajar dengan **batas tak terhingga,** misalnya integral berikut ini :

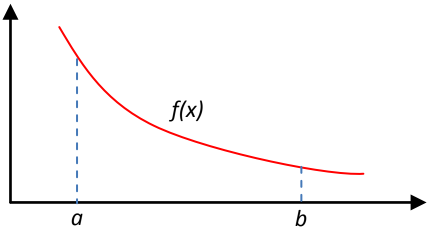
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$$

Bagaimana caranya kita menghitung $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

Kita pahami kembali bahwa untuk setiap b > a ; kita dapat menghitung integral tentu tersebut, yaitu :

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Integral tak wajar untuk
$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$



Gambar 10.1

Dapat juga kita defisinikan sebagai limit dari integral tentu di atas, dimana untuk b →∞.
Maka :

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Bila limit ini ada.

Jika limit di ruas kanan ada dan berhingga, maka integral tak wajar disebut konvergen, dan bila limit di ruas kanan tidak ada maka disebut divergen.

Contoh :

1. Hitung $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

   Penyelesaian :
   Untuk setiap b > 0, maka dapat kita tulis ;

$$\int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Kita ingat kembali bahwa :

$$y = tan^{-1}x$$
$$y = arc\tan x$$
$$\tan y = x$$
$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dx}x$$
$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{dx}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\tan y = 1$$

Karena :

$$\tan y = sec^2 y dy$$
$$sec^2 y\frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2 y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + tan^2 y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Maka :

$$= tan^{-1}x \Big|_0^b$$
$$= tan^{-1}b - tan^{-1} 0$$
$$= tan^{-1}b - 0$$
$$= tan^{-1}b$$

Jadi :

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1 + x^2}dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} tan^{-1}b$$
$$= tan^{-1}\infty$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

Dapat disimpulkan bahwa integral tak wajarnya disebut konvergen (mempunyai nilai).

2. Hitung $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

Penyelesaian :

Untuk b > 0,

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = -\frac{1}{1}e^{-x}\Big|_0^b$$

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b$$

$= -e^{-b} - (-e^0)$

$= -e^{-b} - (-1)$

$= 1 - e^{-b}$

Maka :

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

$= \lim_{b\to\infty}(1 - e^{-b})$

$= 1 - e^{-\infty}$

$= 1 - 0$

$= 1$

Dapat disimpulkan bahwa integral tak wajarnya disebut konvergen (mempunyai nilai).

3. Hitung

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

Penyelesian :

Untuk b > 1, maka :

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

Maka :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}(\ln x)|_1^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}(\ln b) - \lim_{b\to\infty}(\ln 1)$$
$$= \infty$$

Dapat disimpulkan bahwa integral tak wajarnya disebut divergen (tidak mempunyai nilai).

4. Hitung

$$\int_0^\infty 2x^2$$

Jawab :

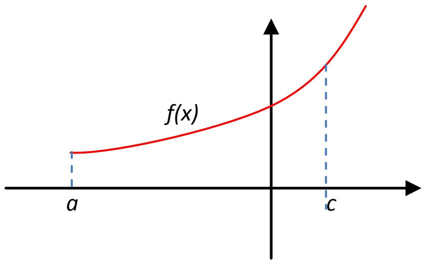
Untuk b > 1, maka :

$$\int_0^\infty 2x^2\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b 2x^2\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}\frac{2}{2+1}x^{2+1}\Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\frac{2}{3}x^3\Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\frac{2}{3}(b)^3 - \lim_{b\to\infty}\frac{2}{3}(0)^3$$
$$= \frac{2}{3}(\infty)^3 - 0$$
$$= \infty$$

Dapat disimpulkan bahwa integral tak wajarnya disebut divergen (tidak mempunyai nilai).

Definis Integral tak wajar untuk

$$\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$$



Gambar 10.2

Dapat juga kita defisinikan sebagai limit dari integral tentu di atas, dimana untuk a→-∞.
Maka :

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx = \lim_{a\to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\,dx$$

Bila limit ini ada.

Jika limit di ruas kanan ada dan berhingga, maka integral tak wajar disebut konvergen, dan bila limit di ruas kanan tidak ada maka disebut divergen.

Contoh :

5. Hitung

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2} dx$$

Penyelesaian :
Ada 3 tahapan dalam menyelesaikan integral tak wajar tersebut yaitu (i) melalui subsitusi pada integral tak tentu, (ii) selanjutnya diselesaikan dengan intregral tentu dengan interval [a, -1], (iii) selesaikan dengan limit.
(i)

$$\int xe^{-x^2} dx$$

Misal :

$u = x^2$

$du = 2x\ dx$

$\frac{du}{2} = x\ dx$

Maka :

$$\int xe^{-x^2} dx = \int e^{-u}\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int e^{-u} du$$

$= -\frac{1}{2}e^{-u}$+C

$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}$+C

(ii) Untuk a < -1, maka :

$$\int_a^{-1} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_a^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-((-1)^2)} - \left(-\frac{1}{2}e^{-(a^2)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-1} - \left(-\frac{1}{2}e^{-a^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-a^2}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-a^2} - \frac{1}{2}e^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - e^{-1}\right)$$

(iii) selesaikan dengan limit

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2} dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1} xe^{-x^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - e^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(e^{-a^2} - e^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-\infty} - e^{-1})$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{e}\right)$$

$$= -\frac{1}{2e}$$

Definis Integral tak wajar untuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

Maka :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx$$

Bila kedua integral di ruas kanan konvergen.

Contoh :

6. Hitung

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \text{, bila konvergen}$$

   Penyelesaian :

   Maka kita akan selesaikan dengan 2 tahapan, yaitu :

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

   Untuk

   $$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

   Telah kita selesaikan pada contoh soal 1 di atas yaitu :

   $$\lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} x \Big|_{0}^{b}$$

   $$= \lim_{b\to\infty} (\tan^{-1} b - 0)$$

$$= \tan^{-1} \infty$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

Selanjutnya :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \lim_{a \to -\infty} \tan^{-1} x \Big|_{a}^{0}$$
$$= \lim_{a \to -\infty} (0 - \tan^{-1} a)$$
$$= -\lim_{a \to -\infty} \tan^{-1} a$$
$$= -(\tan^{-1}(-\infty))$$
$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

Maka :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

7. Hitung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Untuk menyelesaikan soal ini jika salah satu bagian yang dihitung adalah divergen, maka bagian lainnya tidak perlu dihitung lagi dikarenakan jawabannya adalah divergen.

Penyelesaian :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Pertama kita selesaikan untuk interval [0, ∞], yaitu:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Kita cari untuk integral tak tentunya, maka :

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Misal :

$$u = 1 + x^2$$

$$du = 2x\,dx$$

$$\frac{du}{2} = x\,dx$$

Maka :

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\left(\frac{du}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln u + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

Untuk b > 0, maka :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\,\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}(\ln|1+b^2| - \ln|1+0|)$$

$$= \infty$$

Maka dapat disimpulkan integral tak wajar ini adalah divergen.

C. LATIHAN

Carilah apakah integral tak wajar tersebut konvergen atau divergen pada soal berikut ini.

1. $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$

   Kunci jawaban : Divergen.

2. $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(2x-1)^3} dx$

   Kunci jawaban $= -\frac{1}{4}$

3. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

   Kunci jawaban $= \frac{1}{\ln 2}$

D. TUGAS

Carilah apakah integral tak wajar tersebut konvergen atau divergen pada soal berikut ini.

1. $\int_3^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{9+x^2}}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} x \cos x \, dx$
3. $\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^5}$
4. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x}}$
5. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

BAB XI

INTEGRAL TAK WAJAR :
INTEGRAL TAK TERHINGGA

BAB XI. INTEGRAL TAK WAJAR : INTEGRAN TAK TERHINGGA

A. PENDAHULUAN

Pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Mengenali dan memahami pengertian dan bentuk integral tak wajar dengan integran tak terhingga.
2. Menyelesaikan kasus integral tak wajar dengan integran tak terhingga.

B. PENYAJIAN MATERI

Mengenali dan menghitung integral tak wajar dengan integran tak terhingga, misalnya pada integral berikut ini.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx, \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

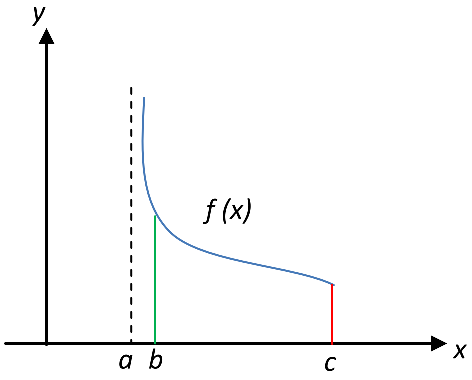
Sekilas kita perhatikan bahwa integral tersebut mirip dengan integral tentu, namun kalau kita cermati maka akan kita pahami bahwa integral tersebut adalah integral tak wajar dengan integran tak terhingga.

Pada integral pertama, integran tak terhingga berada diujung kiri yaitu pada saat 0 karena menghasilkan ∞. Sedangkan pada integral kedua, integran tak terhingga diujung kanan yaitu pada saat 2 dimana akan menghasilkan ∞. Untuk yang ketiga yang membuat integral tak wajar adalah diantara selang [0, 2] yaitu pada angka 1 akan menghasilkan ∞.

I. Integral Tak Wajar

$$\int_a^c f(x)dx$$

Dengan f tak terhingga di a



Gambar 11.1

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \to a^+} \int_b^c f(x)dx$$

Bila limit ini ada.

Contoh :

1. Hitung :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Bila konvergen;

Penyelesaiannya:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \to 0^+} \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Untuk tahap pertama kita selesaikan dengan integral tak tentu pada fungsi tersebut, yaitu :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{1/2}} dx = \int x^{-1/2}\, dx$$

$$\int x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{1}{1/2}x^{1/2} + C$$
$$= 2x^{1/2} + C$$
$$= 2\sqrt{x} + C$$

Untuk setiap b > 0 , dengan b < 1, dapat kita hitung;

$$\int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_b^1$$
$$= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{b}$$
$$= 2 - 2\sqrt{b}$$

Jadi :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \lim_{b\to 0^+}\left(2 - 2\sqrt{b}\right)$$
$$= 2$$

2. Hitunglah :

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$$

Bila integral ini konvergen.

Penyelesaiannya:

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \lim_{b\to 1^+}\int_b^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$$

Untuk tahap pertama kita selesaikan dengan integral tak tentu pada fungsi tersebut, yaitu :

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$$
$$= \int (x-1)^{-1/3}\, dx$$
$$= \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}(x-1)^{-\frac{1}{3}+1} + C$$
$$= \frac{1}{-\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}(x-1)^{\frac{-1}{3}+\frac{3}{3}} + C$$
$$= \frac{1}{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$$
$$= \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$$

Untuk setiap b > 1 , dengan b < 3, dapat kita hitung;

$$\lim_{b\to 1^+} \int_b^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$$
$$= \lim_{b\to 1^+} \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_b^3$$
$$= \lim_{b\to 1^+} \frac{3}{2}\left\{\left((3-1)^{\frac{2}{3}}\right) - \left((b-1)^{\frac{2}{3}}\right)\right\}$$
$$= \lim_{b\to 1^+} \frac{3}{2}\left\{\left((2)^{\frac{2}{3}}\right) - \left((b-1)^{\frac{2}{3}}\right)\right\}$$
$$= \lim_{b\to 1^+} \frac{3}{2}\left\{\left(\sqrt[3]{4}\right) - \left((b-1)^{\frac{2}{3}}\right)\right\}$$
$$= \frac{3}{2}\left\{\left(\sqrt[3]{4}\right) - \left((1-1)^{\frac{2}{3}}\right)\right\}$$

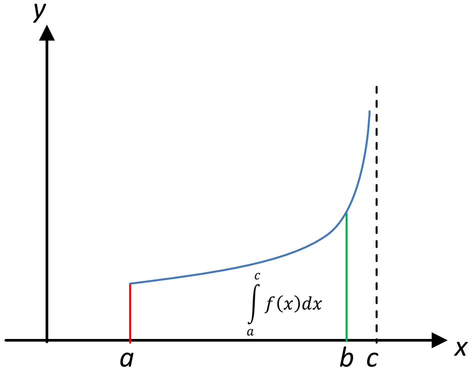
$$= \frac{3}{2}\left\{\left(\sqrt[3]{4}\right) - (0)\right\}$$
$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}\right)$$

Integral ini tak wajar dikarenakan $\frac{1}{(x-1)^{1/3}}$ tak terbatas didekat x = 1.

II. Integral Tak Wajar

$$\int_a^c f(x)dx$$

Dengan *f* tak terhingga di *c*



Gambar 11.2

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c^-} \int_a^b f(x)dx$$

Bila limit ini ada dan terhingga maka integral tersebut dikatakan konvergen, sedangkan yang lainnya disebut divergen.

Contoh :

3. Jika memungkinkan hitunglah integral tak wajar berikut ini.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

Integran ini menuju tak terhingga didekat x = 1.
Penyelesaiannya:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

Untuk tahap pertama kita selesaikan dengan integral tak tentu pada fungsi tersebut, yaitu :

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$
$$= \int \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$$
$$= \int (x-1)^{-2/3}\,dx$$

Kita selesaikan integral ini dengan metode substitusi.
Misal :
$u = x - 1$
$\frac{du}{dx} = 1$
$du = dx$

maka

$$= \int (x-1)^{-2/3}\,dx$$
$$= \int u^{-2/3} du$$
$$= \frac{1}{-\frac{2}{3}+1} u^{-\frac{2}{3}+1} + C$$
$$= \frac{1}{-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} u^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} + C$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{3}} u^{1/3} + C$$
$$= 3u^{1/3} + C$$
$$= 3(x-1)^{1/3} + C$$

Setelah itu kita selesaikan integral awal, yaitu :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3} \Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left\{3(b-1)^{1/3} - 3(0-1)^{1/3}\right\}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left\{3(b-1)^{1/3} - 3(-1)^{1/3}\right\}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left\{3(b-1)^{1/3} - 3(-1)\right\}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left\{3(b-1)^{1/3} + 3\right\}$$

$$= \left\{3(1-1)^{1/3} + 3\right\}$$

$$= \left\{3(0)^{1/3} + 3\right\}$$

$$= \{0 + 3\}$$

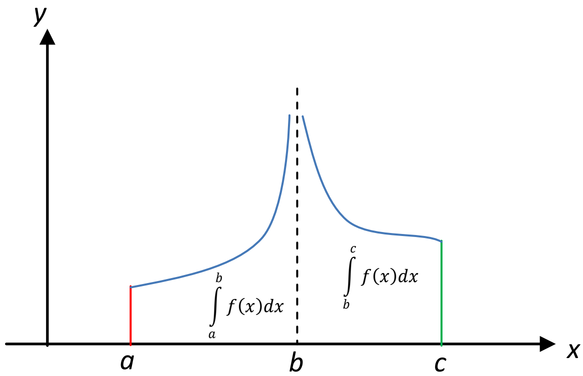
$$= 3$$

Integral ini tak wajar dikarenakan $\frac{1}{(x-1)^{2/3}}$ tak terbatas didekat x = 1.

III. Integral Tak Wajar

$$\int_a^c f(x)dx$$

Dengan *f* tak terhingga di *b*



Gambar 11.3

Definisi :
Andaikan f kontinu pada [a, b], kecuali di c dengan a<c<b. Andaikan $\lim_{x \to c} |f(x)| = \infty$.

Maka :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Bila limit ini ada dan terhingga maka integral tersebut dikatakan konvergen, sedangkan yang lainnya disebut divergen.

Contoh :

4. Jika memungkinkan hitunglah integral tak wajar berikut ini.

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

Integran ini menuju tak terhingga didekat x = 1.

Penyelesaiannya:

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

Untuk tahap pertama kita selesaikan dengan integral tak tentu pada fungsi dari masing-masing intergral tersebut. Apabila nanti hasil dari salah satu fungsi tersebut divergen maka tidak perlu diselesaikan lagi karena hasilnya sudah pasti divergen, namun apabila hasilnya konvergen maka kita akan menemukan hasilnya.

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$
$$= \int \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\, dx$$
$$= \int (x-1)^{-2/3}\, dx$$

Kita selesaikan integral ini dengan metode substitusi.
Misal :
$u = x - 1$
$\frac{du}{dx} = 1$
$du = dx$

maka
$$= \int (x-1)^{-2/3}\, dx$$
$$= \int u^{-2/3} du$$
$$= \frac{1}{-\frac{2}{3}+1} u^{-\frac{2}{3}+1} + C$$
$$= \frac{1}{-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} u^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}} u^{1/3} + C$$
$$= 3u^{1/3} + C$$
$$= 3(x-1)^{1/3} + C$$

Maka pada integral :

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$
$$= \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$
$$= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{b\to 1^+} \int_b^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

(i) Kita hitung dahulu untuk integral

$$\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$
$$= \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3} \Big|_0^b$$
$$= 3 \lim_{b\to 1^-} (x-1)^{1/3} \Big|_0^b$$
$$= 3 \lim_{b\to 1^-} \left\{(b-1)^{1/3} - (0-1)^{1/3}\right\}$$
$$= 3 \lim_{b\to 1^-} \left\{(b-1)^{1/3} - (-1)^{1/3}\right\}$$
$$= 3 \lim_{b\to 1^-} \left\{(b-1)^{1/3} - (-1)\right\}$$
$$= 3 \lim_{b\to 1^-} \left\{(b-1)^{1/3} + 1\right\}$$
$$= 3\left\{(1-1)^{1/3} + 1\right\}$$
$$= \left\{3(0)^{1/3} + 3\right\}$$
$$= \{0 + 3\}$$
$$= 3$$

(ii) Selanjutnya kita hitung untuk integral

$$\lim_{b\to 1^+}\int_b^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{b\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big|_b^4$$

$$= 3\lim_{b\to 1^+} (x-1)^{1/3}\Big|_b^4$$

$$= 3\lim_{b\to 1^+}\left\{(4-1)^{1/3}-(b-1)^{1/3}\right\}$$

$$= 3\lim_{b\to 1^+}\left\{(3)^{1/3}-(b-1)^{1/3}\right\}$$

$$= 3\left\{(3)^{1/3}-(1-1)^{1/3}\right\}$$

$$= 3\left\{(3)^{1/3}-(0)^{1/3}\right\}$$

$$= 3\{1{,}44-0\}$$

$$= 4{,}32$$

Maka didapat akhir perhitungan adalah :

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 4{,}32 \approx 7{,}32$$

C. LATIHAN

Hitunglah integral tak wajar jika mungkin, atau buktikan bahwa integral yang bersangkutan adalah divergen.

1. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx$

   Kunci jawabannya adalah :

   $$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx \approx 2{,}5$$

2. $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx$

   Kunci jawabannya adalah :

   $$\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx \approx 2{,}84$$

3. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx$

Kunci jawabannya adalah :

$$\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx \approx 4{,}84$$

D. TUGAS

Hitunglah integral tak wajar jika mungkin, atau buktikan bahwa integral yang bersangkutan adalah divergen.

1. $\int_2^4 \frac{dx}{(3-x)^{2/3}}$
2. $\int_0^3 \frac{x}{9-x^2}\,dx$
3. $\int_0^2 \frac{3}{x^2+x-2}\,dx$

Daftar Pustaka

DAFTAR PUSTAKA

Herman, E., &Strang, G. 2016. Calculus. OpenStax-Rice University. Houston.

Leithold,L.1986. Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Jilid 3. Penerbit Erlangga. Jakarta

Purcell, E.J., & Varberg, D. 1998. Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 Edisi Kelima. Penerbit Erlangga. Jakarta.

Robbin, J. & Angenent, S. 2009. Math 221 – 1st Semester Calculus, Lecture Notes Version 2.0. University of Wisconsin-Madison Department of Mathematics. Madison.

Strang, G. 2010. Culculus 2ndEdition.Cambridge Press. Wellesley.

Sugiman. 2005. Kalkulus Lanjut. UM Press. Malang.

Thomas. 2005.Calculus. Bostyon San Francisco. New York.