BAHAN KULIAH
KALKULUS

Disusun oleh:
R. Joko Musridho, S.T., M.Phil.

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS PAHLAWAN TUANKU TAMBUSAI
2022

ATURAN PERKULIAHAN
MATA KULIAH KALKULUS
PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA
FT-UP

Materi Kalkulus (3 SKS):

1. Sistem Bilangan
2. Fungsi dan Model
3. Limit dan Kontinuitas
4. Diferensial
5. Aplikasi Diferensial
6. Pengantar Diferensial Parsial

Literatur:

- Stewart, J. (2003). *Kalkulus Jilid 1*. Ed. Ke-4. Jakarta: Erlangga.
- Stewart, J. (2003). *Kalkulus Jilid 2*. Ed. Ke-4. Jakarta: Erlangga.
- Purcell, E. J. dan D. Verberg. (1999). *Kalkulus dan Geometri Analitik Jilid I*. Ed. ke-5. Terjemahan I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita dan Rawuh. Jakarta: Erlangga.
- Purcell, E. J. dan D. Verberg. (1999). *Kalkulus dan Geometri Analitik Jilid 2*. Ed. ke-5. Terjemahan I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita dan Rawuh. Jakarta: Erlangga.
- Buku Lain yang relevan dengan Mata Kuliah Kalkulus Dasar.

Penilaian:

- UTS/UAP : 30%
- UPM : 50%
- TUGAS : 20%

Catatan:

- Materi UTS dari Bab 1-3 dan materi UPM dari bab 1-6. Sementara itu, untuk materi UAP dari Bab 1-4.
- Tugas meliputi: tugas individu, quiz, absensi, dan keaktifan/sikap di kelas.
- Tugas individu meliputi Tugas Terstruktur 1 sampai 6.
- Quiz untuk mahasiswa reguler diberikan 2 kali (sebelum UTS dan sebelum UPM). Sementara itu untuk mahasiswa non-reguler, quiz hanya diberikan sekali sebelum UAP (jika memungkinkan).
- Keaktifan/sikap di kelas meliputi: mengerjakan soal ke depan kelas, menjawab soal secara lisan dalam sesi tanya jawab/diskusi, serta prilaku terkait aspek afektif lainnya selama pembelajaran berlangsung.
- Nilai absensi diperhitungkan untuk membantu nilai akhir.

- Tugas individu dikumpul paling lambat pada pertemuan terakhir perkuliahan sebelum UPM (untuk mahasiswa reguler) atau sebelum UAP (untuk mahasiswa non-reguler) dalam kertas polio bergaris. Apabila telat, tugas tidak diterima dan mendapat nilai 0.
- Apabila terbukti tugas individu dikerjakan oleh orang lain, maka tugas mendapat nilai 0.
- Dalam mengikuti perkuliahan, mahasiswa disarankan membawa kalkulator.
- Bagi mahasiswa yang tidak ikut UTS (mahasiswa reguler) atau UAP (mahasiswa non-reguler) dengan alasan apapun, silakan secepatnya menghubungi Prodi atau TU FMIPA karena ujian susulan terjadwal.
- Untuk UPM, tidak ada susulan. Jika tidak mengikuti UPM, maka mahasiswa yang bersangkutan dinyatakan tidak lulus/mengulang.
- Bagi mahasiswa yang berhalangan hadir (sakit atau izin), wajib memberikan informasi kepada dosen yang bersangkutan.

BAB 1
SISTEM BILANGAN

A. Sejarah Perkembangan Bilangan Real

1. Bilangan Asli (***N***)

   Sifat-sifatnya:

   a. Tertutup terhadap operasi + dan $\times$.

   b. Komutatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

   $$a+b=b+a$$
   $$a\times b=b\times a$$

   c. Asosiatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

   $$a+(b+c)=(a+b)+c$$
   $$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

2. Bilangan Bulat (***Z***)

   Sifat-sifatnya:

   a. Tertutup terhadap operasi + dan $\times$.

   b. Komutatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

   $$a+b=b+a$$
   $$a\times b=b\times a$$

   c. Asosiatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

   $$a+(b+c)=(a+b)+c$$
   $$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

   d. Elemen identitas 0 untuk +, dan elemen identitas 1 untuk $\times$.

   e. Invers + yaitu - , dan invers $\times$ yaitu $\frac{1}{a}$, $a\in Z$.

3. Bilangan Rasional (***Q***)

   $\Rightarrow$ Bilangan yang dapat dinyatakan sebagai perbandingan bilangan bulat atau hasil bagi bilangan bulat.

   $$Q=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{a}{b} \text{ dengan } a,b\in Z\right\}$$

   Contoh: $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{7}$, dan sebagainya.

   Sifat-sifatnya:

   a. Tertutup terhadap operasi + dan $\times$.

   b. Komutatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

   $$a+b=b+a$$
   $$a\times b=b\times a$$

c. Asosiatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

d. Elemen identitas 0 untuk +, dan elemen identitas 1 untuk $\times$.

4. Bilangan Irasional (***Q'***)

$\Rightarrow$ Bilangan real yang tidak rasional, contoh: $\sqrt{2}, \pi, e,$ dan sebagainya.

<u>Catatan:</u>

- **Desimal dan Bilangan Real**

  Setiap bilangan real dapat dinyatakan sebagai desimal tak berakhir. Desimal dari bilangan rasional $\frac{a}{b}$ dapat diperoleh dengan membagikan b pada a.

  Contoh: $\frac{2}{5}=0,40000...$ dan $\frac{1}{3}=0,3333...$

  Berdasarkan contoh di atas, terlihat bahwa hasil pembagiannya menghasilkan desimal yang memiliki angka berulang. Lain halnya dengan bilangan irasional, seperti:

  $$\sqrt{2}=1,41421356...$$
  $$\sqrt{3}=1,73205...$$
  $$\pi=3,14159...$$

  Terlihat bahwa bilangan irasional menghasilkan desimal yang tak berakhir dan tidak berulang.

- **Menyatakan *Q***

  a. Pecahan ke desimal, contoh: $\frac{1}{4}=0,25$; $\frac{1}{3}=0,3333...$; dan seterusnya.

  b. Desimal ke pecahan

  1) Desimal ke pecahan terbatas

     Contoh: $0,25=25\times\frac{1}{100}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

  2) Desimal ke pecahan tak terhingga

     1) Metode Euler (Mengalikan Digit yang Berulang)

        Aturan yang digunakan:

        ✓ Jika berulang 1, maka kalikan 10.

        ✓ Jika berulang 2, maka kalikan 100, dan seterusnya.

Contoh: $x = 0{,}121212$ ...., maka:

$$\begin{array}{rl} 100x &= 12{,}121212 \\ x &= 0{,}121212 \quad - \\ \hline 99x &= 12 \\ x &= \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \end{array}$$

2) Deret Waktu tak Hingga

$$s = \frac{a}{1-r}$$

dengan *a* = suku pertama dan *r* = rasio

Contoh: 0,121212..., maka:

$$\frac{12}{100} + \frac{12}{100^2} + \frac{12}{100^3} + \ldots$$

sehingga $a = \frac{12}{100}$ dan $r = \frac{1}{100}$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} s &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{\left(\frac{12}{100}\right)}{1-\left(\frac{1}{100}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{12}{100}\right)}{\left(\frac{99}{100}\right)} \\ &= \frac{12}{99} = \frac{4}{33}. \end{aligned}$$

5. Bilangan Real (***R***)

   Sifat-sifatnya:

   a. Dapat dinyatakan dalam sebuah garis bilangan.

   b. Menentukan sifat medan/lapangan/gelanggang dalam operasi + dan $\times$.

      Sifat medan antara lain:

      1) Tertutup terhadap operasi + dan $\times$.

      2) Komutatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

3) Asosiatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

4) Elemen identitas 0 untuk +, dan elemen identitas 1 untuk $\times$.

5) Invers + yaitu -, dan invers $\times$ yaitu $\frac{1}{a}$, $a\in Z$.

6) Distributif pada operasi $\times$ terhadap +.
Contoh: Misalkan $a,b,c\in R$, maka:

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$
$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$$

c. Memenuhi sifat urutan.

1) Trikotomi, $\forall a,b\in R$ maka hanya berlaku salah satu pernyataan berikut: $a=b$ atau $a<b$ atau $a>b$.
2) Transitif, $\forall a,b,c\in R$ diperoleh jika $a < b$ dan $b < c$ maka: $a < c$.
3) Adiktif, $\forall a,b,c\in R$ diperoleh jika $a < b$ maka:

$$a + c < b + c$$

4) Multiplikatif, $\forall a,b,c\in R$ diperoleh jika $a < b$ maka:

$$a\times c<b\times c,\ \text{jika } c>0$$
$$a\times c>b\times c,\ \text{jika } c<0$$

Latihan 1

Ubahlah bentuk desimal berikut ke bentuk pecahan menggunakan Metode Euler dan Deret Waktu tak Hingga.

1) 0,181818181818...
2) 0,234234234234...
3) 0,456745674567...
4) 0,12345345345345...
5) 0,789765476547654...

B. Konsep Selang/Interval

Notasi yang digunakan**:**

1. $(a,b)=\{x|a<x<b\}$
2. $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$
3. $[a,b)=\{x|a\le x<b\}$

4. $(a,b] = \{x | a < x \le b\}$

5. $(a,\infty) = \{x | x > a\}$

6. $[a,\infty) = \{x | x \ge a\}$

7. $(-\infty,b) = \{x | x < b\}$

8. $(-\infty,b] = \{x | x \le b\}$

9. $(-\infty,\infty) = \{x | x \in \Re\}$

10. $\varnothing =$ himpunan kosong (tidak mempunyai anggota)

C. Pertidaksamaan

Konsep yang digunakan:

1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.
2) $a < b$ dan $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.
3) $a < b$ dan $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
4) $a < b$ dan $c < 0 \Rightarrow ac > bc$.
5) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Latihan 2

Selesaikanlah soal-soal pertidaksamaan berikut ini.

1) $x^2 - 7x + 6 < 0$
2) $-2x^2 - 5x + 3 \le 0$
3) $x^3 - 4x^2 < 0$
4) $x^3 - x > 0$
5) $x^2\left(x^2 + 6x + 9\right) > -\left(x^2 + 6x + 9\right)$
6) $x^2\left(x - 1\right) \ge \left(x - 1\right)$
7) $\sqrt{x^2 - 6x + 8} < \sqrt{x + 2}$
8) $\sqrt{1 - x^2} < \sqrt{4x + 5}$
9) $\frac{(5x+1)(x+1)}{(2x+4)} \le \frac{(x+1)}{(2x+4)}$
10) $\frac{\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 + 4\right)}{\left(1 - x^2\right)} \ge 0$

D. Nilai/Harga Mutlak

Nilai/harga mutlak sebuah bilangan *a*, dinyatakan dengan $|a|$ adalah jarak dari *a* ke *O* pada garis bilangan real. Jarak selalu bernilai positif atau *0*, sehingga dapat dinotasikan bahwa:

$$|a| \geq 0, \forall x$$

Nilai/harga mutlak dari *a* didefinisikan sebagai:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ jika } a \geq 0 \\ -a, \text{ jika } a < 0 \end{cases}$$

Adapun sifat-sifat dari nilai/harga mutlak adalah sebagai berikut:
Misalkan *a* dan *b* adalah bilangan real sembarang dan *n* bilangan bulat, maka:

1) $\sqrt{a^2} = |a|$
2) $|ab| = |a||b|$
3) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
4) $|a^n| = |a|^n$
5) $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$ dengan $a > 0$
6) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ dengan $a > 0$
7) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ dengan $a > 0$
8) $|x| > a \Leftrightarrow (x > a) \vee (x < -a)$ dengan $a > 0$
9) $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a) \vee (x \leq -a)$ dengan $a > 0$
10) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (pertaksamaan segitiga)

Latihan 3

Selesaikanlah soal-soal pertidaksamaan pada nilai/harga mutlak berikut ini.

1) $|x+4| = 8$
2) $|2x-10| = 6$
3) $|2x+4| \leq 6$
4) $\left|\frac{3x}{5}+1\right| < 4$
5) $|5x-15| > 2$
6) $|7x+2| \geq 5$
7) $|2x-2| < |x-5|$

8) $|4x-2|<2|x-5|$

9) $|4x-2|+|x-5|<10$

10) $|3x-3|+|x+2|\geq 1$

TUGAS TERSTRUKTUR 1

Kerjakanlah soal-soal berikut ini dengan teliti.

1) Ubahlah bentuk desimal berikut ini ke bentuk pecahan menggunakan Metode Euler dan Deret Waktu tak Hingga.
   a) 0,452452452452452...
   b) 0,982349823498234...
   c) 0,3249249249249249...
   d) 0,99345345345345345...
   e) 0,2345325632563256...

2) Selesaikanlah pertidaksamaan berikut ini.
   a) $x^3+8x^2+15x\leq 0$
   b) $x^2(x+3)<(x+3)$
   c) $(x^2+4)(x^2-9)>0$
   d) $\sqrt{x^2-10x+21}\geq\sqrt{2x-11}$
   e) $\dfrac{(8x+3)(x-2)}{4x+5}\geq\dfrac{x(x-2)}{4x+5}$

3) Selesaikanlah pertidaksamaan nilai mutlak berikut ini.
   a) $\left|\dfrac{2}{5}x-3\right|<5$
   b) $\left|4x-\dfrac{1}{2}\right|\geq 8$
   c) $|5x+2|-3|x-4|>0$
   d) $|x+8|+|x-3|\geq 5$
   e) $|x+2|+|3x-18|\leq 8$

SELAMAT MENGERJAKAN

BAB 2
FUNGSI DAN MODEL

A. Fungsi

1. Definisi Fungsi

Fungsi *f* didefinisikan sebagai aturan yang memadankan setiap elemen *x* dalam himpunan *A* secara tepat satu elemen, yang disebut *f(x)* dalam himpunan *B*.

<u>Uji Garis Tegak</u>:

Kurva di bidang *xy* merupakan grafik suatu fungsi *x* jika dan hanya jika terdapat garis tegak yang memotong kurva sebanyak sekali.

2. Daerah Asal dan Daerah Hasil Fungsi

Himpunan *A* disebut daerah asal (*domain*) fungsi, sedangkan himpunan semua nilai *f(x)* dalam himpunan *B* disebut daerah hasil (*range*) fungsi.

3. Penyajian Fungsi

Terdapat 4 cara yang mungkin untuk menyajikan suatu fungsi, yaitu:

a) Secara lisan
b) Secara numerik
c) Secara visual
d) Secara aljabar

4. Simetri

a) Jika fungsi *f* memenuhi $f(-x)=f(x)$ untuk setiap bilangan *x* di daerah asalnya, maka *f* disebut fungsi genap. Ciri geometris suatu fungsi genap adalah grafiknya simetri terhadap sumbu-*y*. Ini berarti bahwa jika kita telah mempunyai grafik *f* untuk $x \geq 0$, seluruh grafik akan kita peroleh cukup dengan cara mencerminkan terhadap sumbu *y*.

b) Jika fungsi *f* memenuhi $f(-x)=-f(x)$ untuk setiap bilangan *x* di daerah asalnya, maka *f* disebut fungsi ganjil. Ciri geometris suatu fungsi ganjil adalah grafiknya simetri terhadap titik asal. Ini berarti bahwa jika kita telah mempunyai grafik *f* untuk $x \geq 0$, seluruh grafik akan kita peroleh cukup dengan cara memutar sebesar 180^0 terhadap titik asal.

5. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

a) Fungsi *f* disebut fungsi naik pada selang *I* jika:

$$f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right) \text{ jika } x_1 < x_2 \text{ di } I$$

b) Fungsi *f* disebut fungsi turun pada selang *I* jika:

$$f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right) \text{ jika } x_1 < x_2 \text{ di } I$$

Latihan 4

1. Carilah daerah asal dan daerah hasil dari fungsi-fungsi berikut ini.
   a) $f\left(x\right) = 2x + 12$
   b) $f\left(x\right) = x^2 + 4x + 12$
   c) $f\left(x\right) = x^2 + 5x - 20$
   d) $f\left(x\right) = x^3 + 1$
   e) $f\left(x\right) = x^4 + 10$
   f) $f\left(x\right) = \sqrt{3x - 12}$
   g) $f\left(x\right) = \sqrt{4 - x^2}$
   h) $f\left(x\right) = 1 + \sin^2\left(3x\right)$
   i) $f\left(x\right) = \left[5 + 2\cos\left(3x\right)\right]^2 - \frac{1}{2}$
   j) $f\left(x\right) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{jika } x < -1 \\ 3 - x, & \text{jika } x \geq -1 \end{cases}$
2. Carilah rumus untuk fungsi yang diuraikan dan nyatakanlah daerah asalnya.
   a) Persegi panjang mempunyai luas 16 m^2. Nyatakanlah keliling persegi panjang itu sebagai fungsi panjang salah satu sisinya.
   b) Persegi panjang mempunyai keliling 20 m. Nyatakanlah luas persegi panjang itu sebagai panjang salah satu sisinya.
   c) Nyatakanlah luas segitiga sama sisi sebagai fungsi sisinya.
3. Tentukanlah apakah fungsi berikut merupakan fungsi genap, ganjil, atau bukan keduanya. Buktikan!
   a) $f\left(x\right) = x^4 - 4x^2$
   b) $f\left(x\right) = x^3 - x$
   c) $f\left(x\right) = 3x^2 + 2x + 1$

B. Model Matematika

1. Definisi

Model matematika adalah uraian secara matematika (seringkali menggunakan fungsi atau persamaan) dari fenomena dunia nyata seperti populasi, permintaan untuk suatu barang, kecepatan benda jatuh, konsentrasi hasil dalam reaksi kimia, harapan hidup seseorang pada waktu lahir, atau biaya reduksi emisi. Tujuan model adalah untuk memahami suatu fenomena dan mungkin membuat prakiraan tentang perilaku di masa depan.

2. Jenis-jenis Fungsi, diantaranya:

a. Fungsi Linear
b. Fungsi Polinom
c. Fungsi Rasional
d. Fungsi Trigonometri dan Invers Trigonometri
e. Fungsi Eksponensial
f. Fungsi Logaritma

3. Fungsi Baru dari Fungsi Lama

a. Komposisi Fungsi

Diberikan dua fungsi *f* dan *g*, fungsi komposit $f \circ g$ (disebut juga komposisi dari *f* dan *g*) didefinisikan sebagai:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Untuk fungsi *f*, *g*, dan *h*, maka fungsi komposit $f \circ g \circ h$ didefinisikan sebagai:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

b. Fungsi Invers

Misalkan *f* adalah fungsi satu-satu dengan daerah asal *A* dan daerah nilai *B*, maka fungsi invers dari *f* yakni f^{-1} yang mempunyai daerah asal *B* dan daerah nilai *A*, didefinisikan sebagai:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

untuk setiap *y* di *B*.

Catatan:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (g^{-1}(f^{-1}(x)))$$

Latihan 5

1. Pengelola sebuah pasar kaget akhir minggu ini mengetahui dari pengalaman bahwa jika ia menarik *x* dolar untuk sewa tempat di pasar itu, maka banyaknya lokasi *y* yang dapat disewakan diberikan oleh persamaan $y = 200 - 4x$.
   a. Sketsalah grafik fungsi tersebut.
   b. Apa yang dinyatakan oleh kemiringan, perpotongan terhadap sumbu *y*, dan perpotongan terhadap sumbu *x* dari grafik tersebut.

2. Diketahui: $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = x^2 + 1$, dan $h(x) = \sqrt{x}$. Tentukanlah:
   a. $(f \circ g)(x)$
   b. $(f \circ h)(x)$
   c. $(f \circ g \circ h)(x)$
   d. $(f \circ h \circ g)(x)$
   e. $(h \circ h \circ f)(x)$
   f. $f^{-1}(x)$
   g. $g^{-1}(x)$
   h. $h^{-1}(x)$
   i. $(f \circ g)^{-1}(x)$

3. Tentukanlah $f(x)$ jika:
   a. $g(x) = 3x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 18x^2 + 23x + 8$
   b. $g(x) = 4x^2 - 1$ dan $(f \circ g)(x) = 28x^2 - 3$

4. Tentukanlah $g(x)$ jika:
   a. $f(x) = x^2 + 1$ dan $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 12x + 10$
   b. $f(x) = x^2 + 7$ dan $(f \circ g)(x) = x + 10$

TUGAS TERSTRUKTUR 2

<u>Kerjakanlah soal-soal berikut ini dengan teliti.</u>

1) Carilah daerah asal dan daerah hasil dari fungsi-fungsi berikut.
   a) $f(x) = x^2 - 5x + 20$
   b) $f(x) = 2 + \sqrt{8x+5}$
   c) $f(x) = 5 + \cos^2(5x)$
   d) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{jika } x \geq 2 \\ 7-2x, & \text{jika } x < 2 \end{cases}$
2) Tentukanlah apakah fungsi berikut adalah fungsi genap, ganjil, atau bukan keduanya. Buktikan!
   a) $f(x) = x^6 + 3x^2$
   b) $f(x) = 2x^5 + 3x^3 - x$
3) Diketahui: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, $g(x) = 1 - 5x$, dan $h(x) = 1 + \sqrt{x}$. Tentukanlah:
   a) $(g \circ f)(x)$
   b) $(g \circ g)(x)$
   c) $(f \circ g \circ h)(x)$
   d) $(f \circ f \circ g)(x)$
   e) $f^{-1}(x)$
   f) $g^{-1}(x)$
   g) $h^{-1}(x)$
   h) $(f \circ g)^{-1}(x)$

SELAMAT MENGERJAKAN

BAB 3
LIMIT DAN KONTINUITAS

A. Limit

1. Definisi Limit

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$$

2. Teorema Limit

Untuk $k, a \in R$, maka:

a) $f(x) = k \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = k$

b) $\lim_{x\to a}\left[k \cdot f(x)\right] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$

c) $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

d) $\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

e) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, dengan $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

f) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

3. Penyelesaian Limit

a) Secara Langsung

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

dengan $f(a) \in R$.

b) Bentuk Limit Aljabar $\Rightarrow$ jika $f(a) = \dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$, atau $\infty \pm \infty$

1) Faktorisasi

2) Dalil *L'Hospital* (turunan): $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

3) Kali sekawan: bentuk $a \pm \sqrt{b}$ atau $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

4) Bagi *x* dengan pangkat tertinggi di penyebut:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{a_1x^m + b_1x^{m-1} + c_1x^{m-2} + \dots}{a_2x^n + b_2x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots}\right] = F \Rightarrow \begin{cases} m = n \Rightarrow F = \dfrac{a_1}{a_2} \\ m > n \Rightarrow F = \infty \\ m < n \Rightarrow F = 0 \end{cases}$$

5) $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2+dx+e}\right]=\dfrac{b-d}{2\sqrt{a}}$

c) Bentuk Limit Trigonometri $\Rightarrow$ jika $f(a)=\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},$ atau $\infty\pm\infty$

1) Faktorisasi

2) Dalil *L'Hospital* (turunan): $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

3) Gunakan sifat:

- $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)=1$
- $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)=1$
- $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin ax}{bx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{ax}{\sin bx}\right)=\dfrac{a}{b}$
- $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan cx}{dx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{cx}{\tan dx}\right)=\dfrac{c}{d}$

4) Gunakan alat bantu:

- $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
- $\sin^2 ax+\cos^2 ax=1$
- $\sin 2x=2\sin x\cos x$
- $\cos 2x=\begin{cases}2\cos^2 x-1\\ 1-2\sin^2 x\\ \cos^2 x-\sin^2 x\end{cases}$
- $\sin x+\sin y=2\sin\left[\dfrac{1}{2}(x+y)\right]\cos\left[\dfrac{1}{2}(x-y)\right]$
- $\sin x-\sin y=2\cos\left[\dfrac{1}{2}(x+y)\right]\sin\left[\dfrac{1}{2}(x-y)\right]$
- $\cos x+\cos y=2\cos\left[\dfrac{1}{2}(x+y)\right]\cos\left[\dfrac{1}{2}(x-y)\right]$
- $\cos x-\cos y=-2\sin\left[\dfrac{1}{2}(x+y)\right]\sin\left[\dfrac{1}{2}(x-y)\right]$

B. Kontinuitas

1. Definisi Kontinu

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

2. Syarat Kontinu

a) $f(a)$ terdefinisi

b) $\lim_{x\to a} f(x)$ terdefinisi

c) $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

Latihan 6

1) Selesaikanlah soal-soal limit berikut ini.

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x+3}$

c) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

d) $\lim_{t\to 100} \dfrac{100-t}{10-\sqrt{t}}$

e) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 3x \tan 5x}{2x^2} \right)$

f) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{2-2\cos 2x}{x^2} \right)$

g) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos 6x - \cos 2x}{3x^2} \right)$

h) $\lim_{x\to \infty} \left[\dfrac{3x^3+5x^2-6x+15}{6x^4+x+30} \right]$

i) $\lim_{x\to \infty} \left[\sqrt{9x^2+7x+12} - \sqrt{9x^2-5x+10} \right]$

j) Buktikanlah bahwa:

- $\lim_{x\to 0} |x| = 0$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ tidak ada

2) Selesaikanlah soal kontinuitas berikut ini.

a) Diketahui:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ untuk } x<1 \\ ax+b, \text{ untuk } 1\le x\le 2 \\ 3x, \text{ untuk } x>2 \end{cases}$$

Tentukanlah nilai *a* dan *b* agar fungsi tersebut kontinu untuk semua *x*.

b) Diketahui:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+10, \text{ untuk } x<2 \\ ax^2+bx, \text{ untuk } 2\le x\le 4 \\ 5x-2, \text{ untuk } x>4 \end{cases}$$

Tentukanlah nilai *a* dan *b* agar fungsi tersebut kontinu untuk semua *x*.

TUGAS TERSTRUKTUR 3

Kerjakanlah soal-soal berikut ini dengan teliti.

1) Selesaikanlah soal-soal limit berikut ini.

   a) $\lim\limits_{t\to 25}\dfrac{t-25}{\sqrt{t}-5}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 7x\tan 5x}{100x\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{100-100\cos^2(x)}{\cos(2x)-1}$

   d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{3x^2-x+9}-\sqrt{3x^2-2x+8}\right]$

2) Diketahui:

$$f(x)=\begin{cases} 5x-3, \text{ untuk } x<3 \\ ax^2+bx, \text{ untuk } 3\le x\le 6 \\ 8x+12, \text{ untuk } x>6 \end{cases}$$

Tentukanlah nilai *a* dan *b* agar fungsi tersebut kontinu untuk semua *x*.

SELAMAT MENGERJAKAN

BAB 4
DIFERENSIAL

A. Definisi Diferensial/Turunan

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

<u>Catatan:</u>

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

B. Rumus-rumus Dasar Diferensial/Turunan

Untuk $a \neq 0$, maka:

1) $y = x^n \to y' = nx^{n-1}$
2) $y = \sin ax \to y' = a \cos ax$
3) $y = \cos ax \to y' = -a \sin ax$
4) $y = \tan ax \to y' = a \sec^2 ax$
5) $y = \cot ax \to y' = -a \csc^2 ax$
6) $y = \sec ax \to y' = a(\sec ax)(\tan ax)$
7) $y = \csc ax \to y' = -a(\csc ax)(\cot ax)$
8) $y = \ln|x| \to y' = \dfrac{1}{x}$
9) $y = e^x \to y' = e^x$
10) $y = e^{ax} \to y' = ae^{ax}$
11) $y = a^x \to y' = a^x \ln a,\ a \neq 1$
12) $y = \tan^{-1}(x) \to y' = \dfrac{1}{x^2+1}$
13) $y = \sin^{-1}(x) \to y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

C. Sifat-sifat Diferensial/Turunan

1) $y = f(x) = k(\text{konstanta}) \Rightarrow y' = f'(x) = 0$
2) $y = f(x) = kx \Rightarrow y' = f'(x) = k$

3) $y = kf(x) \Rightarrow y' = kf'(x)$

4) $y = [f(x) \pm g(x)] \Rightarrow y' = [f'(x)] \pm [g'(x)]$

5) $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

6) $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

7) Aturan Rantai:

$$y = f(u), u = f(t), \text{ dan } t = f(x) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

D. Turunan Logaritmik

$\Rightarrow$ Fungsi berpangkat fungsi

Catatan:

- $\ln(x^r) = r \ln x$
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(e^x) = x,\ x \in R$
- $e^{\ln x} = x,\ x > 0$

Contoh:

Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ dari $y = x^x$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
& y = x^x \\
& \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(x^x) \\
& \Leftrightarrow \ln(y) = x \ln(x) \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left[1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right] \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = [\ln(x) + 1] \\
& \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y[\ln(x) + 1] \\
& \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x^x[\ln(x) + 1]
\end{aligned}$$

E. Turunan Implisit

Contoh:

Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ dari $x^2 + y^2 = 25$.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + y^2 = 25 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(25) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2y\frac{dy}{dx} = -2x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}
\end{aligned}
$$

F. Turunan Tingkat Tinggi

Contoh:

Tentukanlah $f'''(x)$ dari $f(x) = x\sin x$.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\sin x \\
f'(x) &= 1\cdot\sin x + x\cos x \\
&= \sin x + x\cos x \\
f''(x) &= \cos x + \left[1\cdot\cos x + x(-\sin x)\right] \\
&= \cos x + \left[\cos x - x\sin x\right] \\
&= 2\cos x - x\sin x \\
f'''(x) &= 2(-\sin x) - \left[1\cdot\sin x + x\cos x\right] \\
&= -2\sin x - \sin x - x\cos x \\
&= -3\sin x - x\cos x
\end{aligned}
$$

G. Laju yang Terkait

Strategi yang digunakan:

- Baca masalah secara seksama.
- Gambarkan diagram jika mungkin.

- Perkenalkan notasi. Berikan lambang kepada semua besaran yang merupakan fungsi waktu.
- Nyatakan informasi yang diketahui dan laju yang diperlukan dalam bentuk turunan.
- Tuliskan persamaan yang mengaitkan beragam besaran dari masalah tersebut. Jika perlu, gunakan geometri untuk menghilangkan satu peubah melalui substitusi.
- Gunakan aturan rantai untuk menurunkan kedua ruas persamaan terhadap *t*.
- Substitusikan informasi yang diketahui ke dalam persamaan yang dihasilkan dan pecahkan untuk laju yang tidak diketahui tersebut.

Latihan 7

1) Tentukanlah $f'(x)$ dengan menggunakan definisi dari:
   a) $f(x) = 2x + 1$
   b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
   c) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 10x + 2015$

2) Tentukanlah $f'(x)$ dari fungsi-fungsi berikut ini.
   a) $y = 3x^4 - 7\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^2} + 5$
   b) $y = 9x^{12} - 10x\sqrt{x} + \dfrac{7}{x^4} - 2010$
   c) $y = 4\tan(5x) + 2\sin\left(\dfrac{2}{3}x\right) + e^{2x}$
   d) $y = 7\sec(3x) + \cos\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}x\right) + 5^x$
   e) $y = e^{2x}\sin x$
   f) $y = \dfrac{3x+7}{\tan(3x)}$
   g) $y = \sin^3(2x^4 + 2x - 10)$
   h) $y = \tan^2(6x^8 + 12x^3 + 5)$
   i) $y = \sin(\sin(\sin x))$
   j) $y = \sin(\cos(\sec x))$
   k) $y = x^{\sin x}$

l) $y = (\sin x)^{\ln x}$

3) Carilah dy/dx dengan cara turunan implisit berikut ini.

a) $x^3 + y^3 = 6xy$

b) $x^2 y - 5xy - 8 = 0$

c) $x^2 - 2xy + y^2 + 10 = 0$

4) Carilah $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ atau $f'''(x)$ dari:

a) $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 8$

b) $y = (2x+1)^{10}$

c) $y = 5x\cos(x)$

5) Selesaikanlah soal-soal laju yang terkait berikut ini.

a) Jika V adalah volume kubus yang panjang sisinya x dan kubus membesar seiring berjalannya waktu. Carilah dV/dt dalam bentuk dx/dt.

b) Udara dipompakan ke dalam balon bundar sehingga volumenya bertambah pada laju 100 cm^3/detik. Seberapa cepatkah jari-jari balon bertambah pada waktu garis tengahnya 50 cm? Uraikanlah jawaban Anda.

TUGAS TERSTRUKTUR 4

Kerjakanlah soal-soal berikut ini dengan teliti.

1) Tentukanlah $f'(x)$ dengan menggunakan definisi dari:

$$f(x) = 10x^3 + 8x^2 + 4x - 200$$

2) Tentukanlah $f'(x)$ dari fungsi-fungsi berikut ini.

   a) $y = 8x^2 + \sqrt{x} + \dfrac{6}{x^{10}} - 50$

   b) $y = 2\cos\left(\dfrac{5}{3}x\right) + e^{2x} + 12^x$

   c) $y = \dfrac{\sin(5x)+1}{e^{2x}-1}$

   d) $y = \sin^3\left(\cos\left(\sqrt{x^2+2x+1}\right)\right)$

   e) $y = (\cos x)^{\ln x}$

3) Carilah dy/dx dengan cara turunan implisit dari $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 10$.

4) Carilah $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ atau $f'''(x)$ dari:

$$y = x^2 \sin(5x)$$

5) Tangga dengan panjang 10 kaki bersandar pada dinding tegak. Jika alas tangga bergeser menjauhi dinding pada laju 1 kaki/detik, seberapa cepatkah puncak tangga bergeser ke bawah terhadap dinding pada alas tangga berjarak 6 kaki dari dinding? Uraikanlah jawaban Anda.

SELAMAT MENGERJAKAN

BAB 5
APLIKASI DIFERENSIAL

A. Definisi Maksimum/Minimum Mutlak (global)

Fungsi f mempunyai maksimum mutlak (global) di c jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di D dengan D adalah daerah asal f, dan bilangan $f(c)$ disebut nilai maksimum f pada D. Secara serupa, f mempunyai minimum mutlak (global) di c jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di D, dan bilangan $f(c)$ disebut nilai minimum f pada D. Nilai maksimum dan minimum f disebut nilai ekstrim f.

B. Definisi Maksimum/Minimum Lokal (relatif)

Fungsi f mempunyai maksimum lokal (relatif) di c jika $f(c) \geq f(x)$ bilamana x dekat c. Ini berarti, $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di dalam suatu selang terbuka yang mengandung c. Secara serupa, f mempunyai minimum lokal (relatif) di c jika $f(c) \leq f(x)$ bilamana x dekat c.

C. Teorema Nilai Ekstrim dan Bilangan Kritis/Stasioner

- **Teorema Nilai Ekstrim**

  Jika f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$, maka f mencapai nilai maksimum mutlak $f(c)$ dan nilai minimum mutlak $f(d)$ pada suatu bilangan c dan d dalam $[a,b]$.

- **Teorema Fermat**

  Jika f mempunyai maksimum atau minimum lokal di c dan jika $f'(c)$ ada, maka $f'(c) = 0$.

- **Bilangan Kritis/Stasioner**
  - ➢ Bilangan kritis dari suatu fungsi f adalah suatu bilangan c di dalam daerah asal f sedemikian sehingga $f'(c) = 0$ atau $f'(c)$ tidak ada.
  - ➢ Jika f mempunyai maksimum atau minimum lokal di c, maka c adalah bilangan kritis f.
  - ➢ Prosedur untuk mencari nilai maksimum dan minimum mutlak suatu fungsi kontinu f pada selang tertutup $[a,b]$ (**Metode Selang Tertutup**) adalah sebagai berikut:
    1) Carilah nilai f pada bilangan kritis f di dalam (a,b).
    2) Carilah nilai f pada titik ujung selang.

3) Nilai terbesar di antara nilai dari Langkah 1 dan 2 adalah nilai maksimum mutlak dan nilai yang terkecil di antara nilai-nilai tersebut adalah nilai minimum mutlak.

Contoh:

1) Carilah bilangan kritis dari $f(x)=\sqrt{x}(2-x)$.

   Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x}(2-x) \\
&= x^{1/2}(2-x) \\
f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2}(2-x)+x^{1/2}(-1) \\
&= \frac{(2-x)}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x} \\
&= \frac{(2-x)}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\left(\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{(2-x)}{2\sqrt{x}}-\frac{2x}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{2-3x}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

   - Untuk $f'(x)=0 \Rightarrow 2-3x=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$
   - Untuk $f'(x)$ tidak ada $\Rightarrow 2\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$

   Jadi, bilangan kritisnya adalah $\frac{2}{3}$ dan 0.

2) Carilah nilai maksimum dan minimum mutlak dari fungsi:

$$f(x)=x^3-3x^2+1 \text{, dengan } -\frac{1}{2}\le x\le 4$$

   Penyelesaian:

   Karena f kontinu pada $\left[-\frac{1}{2},4\right]$, maka gunakan Metode Selang Tertutup:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3-3x^2+1 \\
f'(x) &= 3x^2-6x=3x(x-2)
\end{aligned}
$$

   Karena $f'(x)$ ada untuk semua *x*, satu-satunya bilangan kritis f terjadi ketika $f'(x)=0$, yaitu $x=0$ atau $x=2$. Perhatikanlah bahwa masing-masing bilangan kritis ini terletak dalam selang $\left(-\frac{1}{2},4\right)$. Nilai f pada bilangan kritik ini adalah

$$f(0)=0^3-3(0)^2+1=1$$

$$f(2)=2^3-3(2)^2+1=-3$$

Nilai f pada titik ujung selang adalah

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{8}$$

$$f(4)=4^3-3(4)^2+1=17$$

Dengan membandingkan ke-4 bilangan tersebut, maka terlihat bahwa nilai maksimum mutlak adalah $f(4)=17$ dan nilai minimum mutlak adalah $f(2)=-3$.

D. Pengujian Fungsi Naik/Turun

- Jika $f'(x)>0$ pada suatu selang, maka f naik pada selang tersebut.
- Jika $f'(x)<0$ pada suatu selang, maka f turun pada selang tersebut.

E. Uji Turunan Pertama

Andaikan *c* adalah bilangan kritis dari fungsi kontinu *f*, maka:

- Jika f' berubah dari positif ke negatif pada *c*, maka *f* mempunyai maksimum lokal pada *c*.
- Jika f' berubah dari negatif ke positif pada *c*, maka *f* mempunyai minimum lokal pada *c*.
- Jika f' tidak berubah tanda pada *c* (yaitu, f' positif pada kedua pihak atau negatif pada kedua pihak), maka *f* tidak mempunyai maksimum atau minimum lokal pada *c*.

F. Definisi Kecekungan dan Ujinya

- **Definisi Kecekungan**
  - Jika grafik *f* terletak di atas semua garis singgungnya pada suatu selang *I*, maka grafik tersebut disebut cekung ke atas pada *I*.
  - Jika grafik *f* terletak di bawah semua garis singgungnya pada suatu selang *I*, maka grafik tersebut disebut cekung ke bawah pada *I*.

- **Uji Kecekungan**
  - Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam I, maka grafik f cekung ke atas pada I.
  - Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam I, maka grafik f cekung ke bawah pada I.

G. Definisi Titik Belok

Titik *P* pada kurva disebut titik belok jika kurva berubah dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah atau dari cekung ke bawah menjadi cekung ke atas pada *P*.

H. Uji Turunan Kedua

Andaikan f'' kontinu dekat *c*, maka:

- Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) > 0$, maka *f* mempunyai minimum lokal pada *c*. Koordinat (c, y) yang diperoleh dalam kondisi ini merupakan titik balik minimum.
- Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) < 0$, maka *f* mempunyai maksimum lokal pada *c*. Koordinat (c, y) yang diperoleh dalam kondisi ini merupakan titik balik maksimum.

Contoh:

Diketahui:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$$

Tentukanlah:

a) Selang dimana f naik dan f turun.

b) Nilai maksimum dan minimum lokal dengan menggunakan uji turunan pertama.

c) Selang dimana f cekung ke atas dan cekung ke bawah.

d) Titik belok.

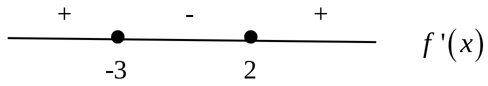
e) Nilai maksimum dan minimum lokal dengan menggunakan uji turunan kedua.

Penyelesaian:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$

$f'(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$

Titik kritis diperoleh hanya ketika $f'(x) = 0$, yaitu $x = -3$ atau $x = 2$.



- f turun pada $(-3,2)$
- f naik pada $(-\infty,-3)$ dan $(2,\infty)$

b) Berdasarkan poin a, terlihat bahwa $f'(x)$ berubah dari positif ke negatif pada -3, sehingga menurut uji turunan pertama:

$$f(-3)=\frac{1}{3}(-3)^3+\frac{1}{2}(-3)^2-6(-3)+1$$

$$=-9+\frac{9}{2}+18+1$$

$$=10+\frac{9}{2}=\frac{29}{2}$$

merupakan nilai maksimum lokal.

Dengan cara yang sama, $f'(x)$ berubah dari negatif ke positif pada 2, sehingga menurut uji turunan pertama:

$$f(2)=\frac{1}{3}(2)^3+\frac{1}{2}(2)^2-6(2)+1$$

$$=\frac{8}{3}+2-12+1$$

$$=\frac{8}{3}-9=\frac{8-27}{3}=\frac{-19}{3}$$

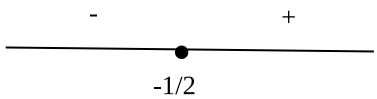
merupakan nilai minimum lokal.

c) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+1$

$f'(x)=x^2+x-6$

$f''(x)=2x+1$

Untuk $f''(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$



- f cekung ke atas pada $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$
- f cekung ke bawah pada $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

d) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+1$

$f'(x)=x^2+x-6$

$f''(x)=2x+1$

sehingga titik beloknya adalah $x=-\frac{1}{2}$ (diperoleh dari $f''(x)=0$ dan terjadi perubahan kecekungan di titik tersebut berdasarkan poin c), maka:

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2-6\left(-\frac{1}{2}\right)+1\\&=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)+3+1\\&=-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}+4\\&=\frac{-1+3+96}{24}=\frac{98}{24}=\frac{49}{12}\end{aligned}$$

Jadi titik beloknya adalah $\left(-\frac{1}{2},\frac{49}{12}\right)$.

e) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+1$

$f'(x)=x^2+x-6$

$f''(x)=2x+1$

Berdasarkan poin a, titik kritisnya adalah $x=-3$ atau $x=2$, maka:

- $f''(-3)=2(-3)+1=-5<0$, maka f mempunyai maksimum lokal pada $x=-3$, yang nilainya:

$$\begin{aligned}f(-3)&=\frac{1}{3}(-3)^3+\frac{1}{2}(-3)^2-6(-3)+1\\&=-9+\frac{9}{2}+18+1\\&=10+\frac{9}{2}=\frac{29}{2}\end{aligned}$$

- $f''(2) = 2(2) + 1 = 5 > 0$, maka f mempunyai minimum lokal pada $x = 2$, yang nilainya:

$$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) + 1$$
$$= \frac{8}{3} + 2 - 12 + 1$$
$$= \frac{8}{3} - 9 = \frac{8-27}{3} = \frac{-19}{3}$$

I. Asimtot

- **Asimtot Datar**

Garis $y = L$ disebut asimtot datar kurva $y = f(x)$ jika salah satu syarat berikut ini terpenuhi, yaitu:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{atau} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Contoh:

Carilah asimtot datar dari:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)$$
$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0}$$
$$= \frac{3}{5}$$

Jadi, asimtot datarnya adalah $\frac{3}{5}$.

- **Asimtot Tegak**

Garis $x = a$ disebut asimtot tegak kurva $y = f(x)$ jika salah satu syarat berikut ini terpenuhi, yaitu:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{atau} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Untuk fungsi rasional, Anda dapat menentukan asimtot tegak dengan menyamakan penyebutnya nol setelah mencoret faktor yang sama.

Contoh:
Carilah asimtot tegak dari:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Penyelesaian:
Asimtot tegak mungkin terjadi ketika penyebut $3x-5=0$, sehingga diperoleh $x=\frac{5}{3}$. Jadi, asimtot tegaknya adalah $x=\frac{5}{3}$, karena:

$$\lim_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^+}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\infty \quad \text{atau} \quad \lim_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^-}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\infty$$

- **Asimtot Miring**

Garis $y=mx+b$ disebut asimtot miring jika:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$$

karena jarak tegak antara kurva $y=f(x)$ dan garis $y=mx+b$ mendekati 0.

Contoh:
Carilah asimtot miring dari:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+5}.$$

Penyelesaian:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+5}=x-\frac{5x}{x^2+5}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-x=-\frac{5x}{x^2+5}$$

maka:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]&=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{5x}{x^2+5}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{\frac{5}{x}}{1+\frac{5}{x^2}}\right]\\&=-\frac{0}{1+0}\\&=0\end{aligned}$$

sehingga garis $y = x$ adalah asimtot miring.

J. Menggambar Sketsa Kurva

Pedoman yang digunakan adalah mencari:

1) Daerah asal
2) Perpotongan sumbu
   - Perpotongan terhadap sumbu $x \Rightarrow y = 0$
   - Perpotongan terhadap sumbu $y \Rightarrow x = 0$
3) Simetri
   - Jika fungsi f memenuhi $f(-x) = f(x)$ untuk setiap bilangan x di dalam daerah asalnya, maka f disebut fungsi genap. Ciri geometris suatu fungsi genap adalah grafiknya simetri terhadap sumbu-y.
   - Jika fungsi f memenuhi $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap bilangan x di dalam daerah asalnya, maka f disebut fungsi ganjil. Ciri geometris suatu fungsi ganjil adalah grafiknya simetri terhadap titik asal.
4) Asimtot
5) Interval naik dan turun
6) Nilai maksimum dan minimum lokal
7) Kecekungan dan titik belok
8) Gambar sketsa kurva

K. Masalah Pengoptimuman

Langkah-langkah dalam memecahkan masalah pengoptimuman adalah

1) Memahami permasalahan
2) Menggambar diagram
3) Memperkenalkan notasi
4) Membuat fungsi satu peubah x dari satu atau lebih peubah
5) Mencari nilai maksimum atau minimum mutlak f

Latihan 8

1) Carilah nilai maksimum dan minimum mutlak dari fungsi:
$$f(x) = x^3 - 12x + 1 \text{ dengan } 0 \le x \le 4$$
2) Carilah asimtot datar, tegak, dan miring dari:
$$f(x) = \frac{x^3}{5x^2 - 10}$$
3) Gunakanlah pedoman untuk membuatkan sketsa kurva dari fungsi:
$$f(x) = 8x^2 - x^4$$

4) Selesaikanlah soal-soal masalah pengoptimuman berikut ini.
   a) Carilah dua bilangan positif yang hasil kalinya 100 dan jumlah keduanya bernilai maksimum.
   b) Carilah dua bilangan yang selisihnya 100 dan hasil kalinya bernilai minimum.

TUGAS TERSTRUKTUR 5

Kerjakanlah soal berikut ini dengan teliti.

Gunakanlah pedoman untuk membuatkan sketsa kurva dari fungsi:

$$y = 2x^4 + 10x^3$$

SELAMAT MENGERJAKAN

BAB 6
PENGANTAR DIFERENSIAL PARSIAL

A. Fungsi *n* Variabel

Suatu fungsi f dari n variabel adalah suatu aturan yang memberikan kepada masing-masing pasangan terurut bilangan real rangkap n di dalam daerah asal $D \subset R^n$ sebuah bilangan real tunggal yag dinyatakan oleh:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

Contoh:

1) $f\left(x, y\right) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
2) $f\left(x, y, z\right) = x^2 + y^2 + z^2$

B. Diferensial Parsial dan Diferensial Total

Jika f adalah fungsi 2 variabel, dinotasikan $f\left(x, y\right)$, maka diferensial parsialnya adalah

$$f_x\left(x, y\right) = f_x = D_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f\left(x+h, y\right) - f\left(x, y\right)}{h}\right)$$

$$f_y\left(x, y\right) = f_y = D_y f = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f\left(x, y+h\right) - f\left(x, y\right)}{h}\right)$$

Aturan untuk pencarian diferensial parsial dari $z = f\left(x, y\right)$:

1) Untuk mencari f_x, anggap y sebagai konstanta dan diferensialkan $f\left(x, y\right)$ terhadap *x*.
2) Untuk mencari f_y, anggap x sebagai kostanta dan diferensialkan $f\left(x, y\right)$ terhadap *y*.

Pendiferensialan beserta aturannya ini berlaku juga untuk fungsi 3 variabel atau lebih.

Untuk fungsi 2 variabel $z = f\left(x, y\right)$, maka diferensial total dz didefinisikan oleh:

$$dz = f_x\left(x, y\right)dx + f_y\left(x, y\right)dy = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$$

Untuk fungsi 3 variabel atau lebih, berlaku hampir sama dengan fungsi 2 variabel. Sebagai contoh untuk fungsi 3 variabel $w = f(x,y,z)$, maka diferensial total dw didefinisikan oleh:

$$dw = f_x(x,y,z)\,dx + f_y(x,y,z)\,dy + f_z(x,y,z)\,dz = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz$$

Latihan 9

1) Carilah diferensial parsial pertama beserta diferensial totalnya dari fungsi berikut.
   a) $f(x,y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$
   b) $f(x,y) = \sin x \cos y$
   c) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$
   d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
2) Carilah diferensial parsial yang ditunjuk berikut ini.
   a) f_{xyz} dari $f(x,y,z) = x^5 + x^4y^4z^3 + yz^2$
   b) f_{xyy} dari $f(x,y) = x \sin y$

C. Bidang Singgung

Andaikan f mempunyai diferensial parsial kontinu. Satu persamaan bidang singgung terhadap permukaan $z = f(x,y)$ di titik $P(x_0, y_0, z_0)$ adalah

$$z - z_0 = \left[f_x(x_0,y_0)\right](x - x_0) + \left[f_y(x_0,y_0)\right](y - y_0)$$

Latihan 10

Carilah persamaan bidang singgung terhadap kurva yang diberikan pada titik berikut ini!

a) $z = 2x^2 + y^2, (1,1,3)$
b) $z = y^2 - x^2, (-4,5,9)$
c) $z = 9x^2 + y^2 + 6x - 3y + 5, (1,2,18)$

TUGAS TERSTRUKTUR 6

Kerjakanlah soal-soal berikut ini dengan teliti.

1) Carilah diferensial parsial pertama beserta diferensial totalnya dari:

$$f\left(x,y,z\right)=\frac{x^{a+1}y^{b+2}z^{c+3}+x^{a+b}y^{a+2}z^{a+c}}{x^{a+c+2}+y^{a+c+2}+z^{a+c+2}}.$$

2) Carilah diferensial parsial dari f_{xxyz} untuk:

$$f\left(x,y,z\right)=x^{a+1}y^{b+c+1}z^{a+c+2}+x^{a+5}y^{b+c+4}+y^{b+c+10}z^{a+c+12}$$

3) Carilah persamaan bidang singgung terhadap kurva yang diberikan pada titik

$$z=\left(a+3\right)x^{a+5}+\left(b+3\right)y^{b+c+1}+\left(a+3\right)x^{a+b}y^{a+1}+\left(a+b+c\right),\qquad \left(a,b+5,c+5\right)$$

Catatan:

Nilai *a*, *b*, dan *c* diambil dari 3 digit terakhir NPM Anda. Contoh: 20114150035, maka nilai *a* = 0, *b* = 3, dan *c* = 5.

SELAMAT MENGERJAKAN

DAFTAR PUSTAKA

Purcell, E. J. dan D. Verberg. (1999). *Kalkulus dan Geometri Analitik Jilid I*. Ed. ke-5. Terjemahan I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita dan Rawuh. Jakarta: Erlangga.

Purcell, E. J. dan D. Verberg. (1999). *Kalkulus dan Geometri Analitik Jilid 2*. Ed.ke-5. Terjemahan I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita dan Rawuh. Jakarta: Erlangga.

Stewart, J. (2003). *Kalkulus Jilid 1*. Ed. Ke-4. Jakarta: Erlangga.

Stewart, J. (2003). *Kalkulus Jilid 2*. Ed. Ke-4. Jakarta: Erlangga.