

PENGANTAR ANALISIS REAL



Disusun oleh

Dr. Molli Wahyuni, S.Si, M.Pd

UNIVERSITAS PAHLAWAN TUANKU TAMBUSAI

2022

Daftar Isi

Pengantar Analisis Real	i
Daftar Isi.....	ii
1.1. Sifat-sifat Aljabar dan urutan dalam \mathbb{R}.....	1
1.2. Nilai Mutlak dan Garis Bilangan Real	14
1.3. Sifat Lengkap \mathbb{R}	18
1.4. Penggunaan Sifat Aksioma Supremum	22
1.5. Interval dalam \mathbb{R}.....	28
2.1. Barisan dan Limit Barisan	39
2.2. Teorema-teorema Limit	46
2.3. Barisan Monoton	54
2.4. Barisan Bagian.....	57
2.5. Barisan Cauchy.....	63
2.6. Sifat Barisan Divergen	66
2.7. Deret Tak Berhingga	69
Daftar Pustaka	75

Pada bab ini dibahas sifat-sifat penting dari sistem bilangan real \mathbb{R} , seperti sifat-sifat aljabar, urutan, dan ketaksamaan. Selanjutnya, akan diberikan beberapa pengertian seperti bilangan rasional, harga mutlak, himpunan terbuka, dan pengertian lainnya yang berkaitan dengan bilangan real.

1.1. Sifat-sifat Aljabar dan Urutan dalam \mathbb{R}

Sebelum menjelaskan tentang sifat-sifat \mathbb{R} , diberikan terlebih dahulu tentang struktur aljabar dari sistem bilangan real. Akan diberikan penjelasan singkat mengenai sifat-sifat dasar dari penjumlahan dan perkalian, sifat-sifat aljabar lain yang dapat diturunkan dalam beberapa aksioma dan teorema. Dalam terminologi aljabar abstrak, sistem bilangan real membentuk lapangan (*field*) terhadap operasi biner penjumlahan dan perkalian biasa.

Sifat-sifat Aljabar \mathbb{R}

Pada himpunan semua bilangan real \mathbb{R} terdapat dua operasi biner, dinotasikan dengan “+” dan “.” yang disebut dengan **penjumlahan** (*addition*) dan **perkalian** (*multiplication*). Operasi biner tersebut memenuhi sifat-sifat berikut:

(A1) $a + b = b + a$ untuk semua $a, b \in \mathbb{R}$ (sifat komutatif penjumlahan)

(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk semua $a, b, c \in \mathbb{R}$ (sifat asosiatif penjumlahan)

(A3) terdapat $0 \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $0 + a = a$ dan $a + 0 = a$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$ (eksistensi elemen nol)

(A4) untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ terdapat $-a \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a + (-a) = 0$ dan $(-a) + a = 0$ (eksistensi elemen negatif atau invers penjumlahan)

(M1) $a \cdot b = b \cdot a$ untuk semua $a, b \in \mathbb{R}$ (sifat komutatif perkalian)

(M2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk semua $a, b, c \in \mathbb{R}$ (sifat asosiatif perkalian)

- (M3) terdapat $1 \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $1 \cdot a = a$ dan $a \cdot 1 = a$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$ (eksistensi elemen unit 1)
- (M4) untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ terdapat $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$ dan $\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$ (eksistensi invers perkalian)
- (D) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ untuk semua $a, b, c \in \mathbb{R}$ (sifat distributif perkalian atas penjumlahan)

Sifat-sifat di atas telah umum diketahui. Sifat (A1)-(A4) menjelaskan sifat penjumlahan, sifat (M1)-(M4) menjelaskan sifat perkalian, dan sifat terakhir menggabungkan kedua operasi.

Selanjutnya, diberikan beberapa teorema tentang elemen 0 dan 1 yang telah diberikan pada sifat (A3) dan (M3) di atas. Juga akan ditunjukkan bahwa perkalian dengan 0 akan selalu menghasilkan 0.

Teorema 1.1.1.

- (a) Jika $z, a \in \mathbb{R}$ dengan $z + a = a$, maka $z = 0$.
- (b) Jika u dan $b \neq 0$ elemen \mathbb{R} dengan $u \cdot b = b$, maka $u = 1$.
- (c) Jika $a \in \mathbb{R}$, maka $a \cdot 0 = 0$.

Bukti.

- (a) Menggunakan aksioma (A3), (A4), (A2), asumsi $z + a = a$, dan (A4), diperoleh

$$\begin{aligned} z &= z + 0 \\ &= z + (a + (-a)) \\ &= (z + a) + (-a) \\ &= a + (-a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- (b) Menggunakan aksioma (M3), (M4), (M2), asumsi $u \cdot b = b$, dan (M4), diperoleh

$$\begin{aligned}
u &= u \cdot 1 \\
&= u \cdot \left(b \cdot \left(\frac{1}{b} \right) \right) \\
&= (u \cdot b) \cdot \left(\frac{1}{b} \right) \\
&= b \cdot \left(\frac{1}{b} \right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(c) Karena $a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a$, maka $a \cdot 0 = 0$.

Dengan demikian, maka teorema terbukti. \square

Teorema 1.1.2. *Jika $a \in \mathbb{R}$, maka*

- (a) $(-1) \cdot a = -a$.
- (b) $-(-a) = a$.
- (c) $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Selanjutnya, diberikan dua sifat penting dari operasi perkalian, yaitu sifat ketunggalan elemen inversnya dan bahwa perkalian dua bilangan itu hasilnya nol apabila salah satu faktornya adalah nol.

Teorema 1.1.3.

- (a) *Jika $a + b = 0$, maka $b = -a$.*
- (b) *Jika $a \neq 0$ dan $b \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a \cdot b = 1$, maka $b = \frac{1}{a}$.*
- (c) *Jika $a \cdot b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$.*

Bukti.

(a) Karena $a + b = 0$, maka

$$a + b = 0 \Leftrightarrow (-a) + (a + b) = (-a) + 0$$

$$\Leftrightarrow ((-a) + a) + b = -a \quad (\text{A2 dan A3})$$

$$\Leftrightarrow 0 + b = -a \quad (\text{A4})$$

$$\Leftrightarrow b = -a. \quad (\text{A3})$$

(b) Karena $a \cdot b = 1$, maka

$$a \cdot b = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)(a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)(b) = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot b = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{a}.$$

(c) Diketahui $a \cdot b = 0$, maka

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right) \cdot (a \cdot b) = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)(b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)(b) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 0.$$

Dengan cara yang sama, kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{b}$, maka diperoleh $a = 0$.

Dengan demikian teorema terbukti. \square

Teorema tersebut di atas menjelaskan beberapa sifat aljabar sederhana dari sistem bilangan real. Beberapa akibat dari teorema tersebut diberikan sebagai bahan latihan soal di bagian akhir subbab ini.

Operasi **pengurangan** (*subtraction*) didefinisikan dengan $a - b := a + (-b)$ untuk $a, b \in \mathbb{R}$. Sama halnya dengan operasi **pembagian** (*division*), untuk $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $b \neq 0$ didefinisikan $\frac{a}{b} := a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$.

Untuk selanjutnya, $a \cdot b$ cukup dituliskan dengan ab , dan penulisan a^2 untuk aa , a^3 untuk $(a^2)a$, dan secara umum didefinisikan $a^{n+1} := (a^n)a$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Lebih lanjut, $a^1 = a$, dan jika $a \neq 0$, maka dapat ditulis $a^0 = 1$ dan a^{-1} untuk $\frac{1}{a}$, dan jika $n \in \mathbb{N}$, dapat ditulis a^{-n} untuk $\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Bilangan Rasional dan Irrasional

Telah diketahui bahwa himpunan \mathbb{N} dan \mathbb{Z} adalah subset dari \mathbb{R} . Elemen \mathbb{R} yang dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{b}{a}$ di mana $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $a \neq 0$ disebut dengan **bilangan rasional** (*rational numbers*). Himpunan semua bilangan rasional di \mathbb{R} dinotasikan dengan \mathbb{Q} . Dapat ditunjukkan bahwa penjumlahan dan perkalian dua bilangan rasional adalah bilangan rasional. Lebih lanjut, sifat-sifat lapangan juga berlaku untuk \mathbb{Q} .

Akan tetapi, tidak semua elemen \mathbb{R} merupakan elemen \mathbb{Q} , seperti $\sqrt{2}$ yang tidak dapat dinyatakan ke dalam bentuk $\frac{b}{a}$. Elemen \mathbb{R} yang bukan elemen \mathbb{Q} disebut **bilangan irrasional** (*irrational numbers*).

Akan ditunjukkan bahwa tidak terdapat bilangan rasional yang kuadratnya adalah 2. Untuk membuktikannya digunakan istilah genap dan ganjil. Suatu bilangan asli disebut **genap** apabila bilangan itu mempunyai bentuk $2n$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, dan disebut **ganjil** apabila bilangan itu mempunyai bentuk $2n-1$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.1.4. *Tidak ada elemen $r \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $r^2 = 2$.*

Bukti. Andaikan ada $r \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $r^2 = 2$. Karena $r \in \mathbb{Q}$, maka r dapat dituliskan sebagai $\frac{p}{q}$ dengan p dan q tidak mempunyai faktor berserikat selain 1, sehingga diperoleh $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ atau $p^2 = 2q^2$. Karena $2q^2$ genap, maka p^2 genap. Akibatnya p juga genap, sebab jika ganjil, maka $p = 2m - 1$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, atau $p^2 = (2m - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1$ yang berarti bahwa p^2 ganjil. Jadi, p haruslah genap. Karena p genap, maka $p = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, sehingga $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Di lain pihak diketahui $p^2 = 2q^2$ dan p genap, akibatnya q ganjil, sebab jika q genap, maka faktor berserikat p dan q bukan 1. Jadi, q haruslah ganjil. Sehingga diperoleh $p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$ yang berarti q genap. Timbul kontradiksi bahwa q ganjil. Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah tidak ada $r \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $r^2 = 2$. \square

Sifat-sifat Urutan pada \mathbb{R}

Sifat urutan menjelaskan tentang kepositifan (*positivity*) dan ketaksamaan (*inequalities*) di antara bilangan-bilangan real.

Ada subset tak kosong $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$, yang disebut dengan **himpunan bilangan-bilangan real positif tegas**, yang memenuhi sifat-sifat berikut:

- (i) Jika $a, b \in \mathbb{P}$, maka $a + b \in \mathbb{P}$.
- (ii) Jika $a, b \in \mathbb{P}$, maka $ab \in \mathbb{P}$.
- (iii) Jika $a \in \mathbb{P}$, maka memenuhi tepat satu kondisi berikut:

$$a \in \mathbb{P}, \quad a = 0, \quad -a \in \mathbb{P}.$$

Sifat pertama dan kedua pada teorema di atas menjelaskan tentang sifat tertutup \mathbb{P} terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Sifat yang ketiga (iii) sering disebut **Sifat Trikotomi** (*Trichotomy Property*), sebab akan membagi \mathbb{R} ke dalam tiga jenis elemen yang berbeda. Hal ini menjelaskan bahwa himpunan $\{-a : a \in \mathbb{P}\}$ dari bilangan

real **negatif** tidak mempunyai elemen yang sama dengan himpunan bilangan real positif. Lebih lanjut, \mathbb{R} merupakan gabungan tiga himpunan saling asing tersebut, yaitu

$$\mathbb{R} = \mathbb{P} \cup \{-a : a \in \mathbb{P}\} \cup \{0\}.$$

Definisi 1.1.5.

- (i) Jika $a \in \mathbb{P}$, ditulis $a > 0$, artinya a adalah bilangan real **positif**.
- (ii) Jika $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, ditulis $a \geq 0$, artinya a adalah bilangan real **nonnegatif**.
- (iii) Jika $-a \in \mathbb{P}$, ditulis $a < 0$, artinya a adalah bilangan real **negatif**.
- (iv) Jika $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, ditulis $a \leq 0$, artinya a adalah bilangan real **nonpositif**.

Definisi 1.1.6. Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Jika $a - b \in \mathbb{P}$, maka ditulis $a > b$ atau $b < a$.
- (b) Jika $a - b \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, maka ditulis $a \geq b$ atau $b \leq a$.

Sifat Trikotomi di atas berakibat bahwa untuk $a, b \in \mathbb{R}$ memenuhi tepat satu kondisi berikut:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

Selanjutnya, jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a = b$. Jika $a < b < c$, maka artinya bahwa $a < b$ dan $b < c$.

Teorema 1.1.7. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- (a) Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$.
- (b) Jika $a > b$, maka $a + c > b + c$.
- (c) Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ca > cb$.
Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ca < cb$.
- (d) Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$.
Jika $a < 0$, maka $\frac{1}{a} < 0$.

Bukti.

- (a) Diketahui $a > b$ dan $b > c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Karena $a > b$, maka $a - b \in \mathbb{P}$. Karena $b > c$, maka $b - c \in \mathbb{P}$. Menurut sifat urutan, maka $a + b \in \mathbb{P}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}(a-b) + (b-c) \in \mathbb{P} &\Leftrightarrow a - b + b - c \in \mathbb{P} \\ &\Leftrightarrow (a-c) + (-b+b) \in \mathbb{P} \\ &\Leftrightarrow (a-c) + 0 \in \mathbb{P} \\ &\Leftrightarrow a - c \in \mathbb{P} \\ &\Leftrightarrow a > c.\end{aligned}$$

- (b) Jika $a - b \in \mathbb{P}$, maka $(a+c) - (b-c) = a - b \in \mathbb{P}$. Sehingga diperoleh bahwa $a + c > b + c$.

- (c) Jika $a - b \in \mathbb{P}$ dan $c \in \mathbb{P}$, maka $ca - cb = c(a - b) \in \mathbb{P}$. Akibatnya $ca > cb$ untuk $c > 0$. Gunakan langkah yang sama untuk $c < 0$

- (d) Cobalah Anda buktikan sendiri. □

Oleh karena itu, dapat dilihat bahwa bilangan asli juga merupakan bilangan real positif. Sifat ini diperoleh dari sifat dasar urutan, berikut ini diberikan teoremanya.

Teorema 1.1.8.

- (a) Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, maka $a^2 > 0$.
(b) $1 > 0$.
(c) Jika $n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$.

Teorema 1.1.9. Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$, maka $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Bukti. Karena $a < b$, maka $a + a < a + b \Leftrightarrow 2a < a + b$, diperoleh $a < \frac{(a+b)}{2}$. Karena $a < b$, maka $a + b < b + b \Leftrightarrow a + b < 2b$, diperoleh $\frac{(a+b)}{2} < b$. Akibatnya, dari kedua pernyataan di atas diperoleh bahwa $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Dapat ditunjukkan bahwa tidak ada bilangan real positif yang terkecil, sebab jika diberikan $a > 0$, dan karena $\frac{1}{2} > 0$, maka diperoleh

$$0 < \frac{1}{2}a < a.$$

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa suatu himpunan $a \geq 0$ adalah sama dengan nol, maka harus ditunjukkan bahwa a selalu lebih kecil dari sebarang bilangan positif yang diberikan.

Teorema 1.1.10. *Jika $a \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.*

Bukti. Andaikan $a > 0$, maka $a > \frac{a}{2} > 0$. Diambil $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$ (ε_0 bilangan real positif tegas), maka $a > \varepsilon_0 > 0$. Kontradiksi dengan pernyataan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah $a = 0$. \square

Perkalian antara dua bilangan positif hasilnya adalah positif. Akan tetapi, hasil perkalian yang positif belum tentu setiap faktornya positif.

Teorema 1.1.11. *Jika $ab > 0$, maka berlaku*

- (i) $a > 0$ dan $b > 0$, atau
- (ii) $a < 0$ dan $b < 0$.

Bukti. Karena $a < b$, maka $a + a < a + b \Leftrightarrow 2a < a + b$, diperoleh $a < \frac{(a+b)}{2}$. Karena $a < b$, maka $a + b < b + b \Leftrightarrow a + b < 2b$, diperoleh $\frac{(a+b)}{2} < b$. Akibatnya, dari kedua pernyataan di atas diperoleh bahwa $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Dapat ditunjukkan bahwa tidak ada bilangan real positif yang terkecil, sebab jika diberikan $a > 0$, dan karena $\frac{1}{2} > 0$, maka diperoleh

$$0 < \frac{1}{2}a < a.$$

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa suatu himpunan $a \geq 0$ adalah sama dengan nol, maka harus ditunjukkan bahwa a selalu lebih kecil dari sebarang bilangan positif yang diberikan.

Teorema 1.1.10. *Jika $a \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.*

Bukti. Andaikan $a > 0$, maka $a > \frac{a}{2} > 0$. Diambil $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$ (ε_0 bilangan real positif tegas), maka $a > \varepsilon_0 > 0$. Kontradiksi dengan pernyataan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah $a = 0$. \square

Perkalian antara dua bilangan positif hasilnya adalah positif. Akan tetapi, hasil perkalian yang positif belum tentu setiap faktornya positif.

Teorema 1.1.11. *Jika $ab > 0$, maka berlaku*

- (i) $a > 0$ dan $b > 0$, atau
- (ii) $a < 0$ dan $b < 0$.

Akibat 1.1.12. Jika $ab < 0$, maka berlaku

- (i) $a < 0$ dan $b > 0$, atau
- (ii) $a > 0$ dan $b < 0$.

Ketaksamaan (Inequalities)

Selanjutnya, akan ditunjukkan bagaimana sifat urutan dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu ketaksamaan. Perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 1.1.13.

- (a) Tentukan himpunan A dari bilangan real x sedemikian hingga $2x + 3 \leq 6$.

Jawab. Diketahui $x \in A$ dan $2x + 3 \leq 6$, maka

$$2x + 3 \leq 6 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Jadi, $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{3}{2} \right\}$.

- (b) Diberikan $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 2\}$. Tentukan bentuk lain dari B .

Jawab. Diketahui $x \in B$ dan $x^2 + x > 2$ atau $x^2 + x - 2 > 0$ atau $(x-1)(x+2) > 0$. Sehingga diperoleh bahwa (i) $x-1 > 0$ dan $x+2 > 0$, atau (ii) $x-1 < 0$ dan $x+2 < 0$. Untuk kasus (i) diperoleh bahwa $x > 1$ dan $x > -2$, yang berarti $x > 1$. Untuk kasus (ii) diperoleh bahwa $x < 1$ dan $x < -2$, yang berarti $x < -2$. Jadi, himpunannya adalah

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}.$$

Teorema 1.1.14. Jika $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, maka

- (a) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- (b) $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

1.1.15. Ketaksamaan Bernoulli Jika $x > -1$, maka $(1+x)^n \geq 1+nx$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Akan dibuktikan menggunakan induksi.

Untuk $n = 1$, maka

$$(1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x \Leftrightarrow 1+x \geq 1+x \text{ (pernyataan benar).}$$

Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $(1+x)^k \geq 1+kx$. Akan dibuktikan benar untuk $n = k+1$, yaitu

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1+kx+x+kx^2 \\ &= 1+(k+1)x+kx^2.\end{aligned}$$

Karena $kx^2 \geq 0$, maka $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$, yang berarti benar untuk $n = k+1$. Jadi, terbukti bahwa $(1+x)^n \geq 1+nx$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. \square

1.1.16. Ketaksamaan Cauchy Jika $n \in \mathbb{N}$ dan $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, maka

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

atau

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Selanjutnya, jika tidak semua $b_i = 0$, maka $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$ jika dan hanya jika terdapat $s \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a_1 = sb_1, a_2 = sb_2, \dots, a_n = sb_n$.

Bukti. Didefinisikan fungsi $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + (a_2 - tb_2)^2 + \dots + (a_n - tb_n)^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jelas bahwa $F(t) \geq 0$, untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned}F(t) &= (a_1^2 - 2ta_1b_1 + t^2b_1^2) + (a_2^2 - 2ta_2b_2 + t^2b_2^2) + \dots + (a_n^2 - 2ta_nb_n + t^2b_n^2) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - 2t(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) + t^2(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) - 2t \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) + t^2 \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).\end{aligned}$$

Ingat bahwa $A+2Bt+Ct^2 \geq 0$ jika dan hanya jika $(2B)^2 - 4AC \leq 0$, yang berakibat $B^2 \leq AC$. Sehingga diperoleh bahwa

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i\right).$$

Dengan demikian teorema terbukti. □

SOAL LATIHAN SUBBAB 1.1

1. Jika $a, b \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa:

(a) $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

(b) $(-a)(-b) = ab$.

(c) $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}$ jika $b \neq 0$.

2. Selesaikan persamaan berikut.

(a) $2x + 5 = 8$.

(b) $x^2 = 2x$.

3. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa $\frac{1}{(ab)} = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)$.

4. Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional t sedemikian hingga $t^2 = 3$.

5. Buktikan bahwa jika $a > 0$, maka $\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)} = a$.

6. Jika $a, b \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa $a^2 + b^2 = 0$ jika dan hanya jika $a = b = 0$.

7. Buktikan bahwa $\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, untuk semua $a, b \in \mathbb{R}$.

8. Tunjukkan bahwa jika $a \in \mathbb{R}$ dan $m, n \in \mathbb{N}$, maka $a^{m+n} = a^m a^n$ dan $(a^m)^n = a^{mn}$.

(Gunakan induksi matematik.)

1.2. Nilai Mutlak dan Garis Bilangan Real

Dari sifat Trikotomi, dapat ditarik kesimpulan bahwa jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, maka a atau $-a$ merupakan bilangan real positif. Nilai mutlak dari $a \neq 0$ didefinisikan sebagai nilai positif dari dua bilangan tersebut.

Definisi 1.2.1. Nilai mutlak (*absolute value*) dari suatu bilangan real a , dinotasikan dengan $|a|$, didefinisikan sebagai

$$|a| := \begin{cases} a & \text{jika } a > 0. \\ 0 & \text{jika } a = 0. \\ -a & \text{jika } a < 0. \end{cases}$$

Sebagai contohnya, $|3| = 3$ dan $|-9| = 9$. Dapat dilihat dari definisi di atas bahwa $|a| \geq 0$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$, dan bahwa $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$. Juga bahwa $|-a| = a$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$. Berikut ini diberikan beberapa sifat nilai mutlak.

Teorema 1.2.2.

- (a) $|ab| = |a||b|$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$.
- (b) $|a|^2 = a^2$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$.
- (c) Jika $c \geq 0$, maka $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$.
- (d) $-|a| \leq a \leq |a|$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$.

Bukti.

- (a) Jika $a = b = 0$, maka terbukti. Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $ab > 0$, sehingga $|ab| = ab = |a||b|$. Jika $a > 0$ dan $b < 0$, maka $ab < 0$, sehingga $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$.

(b) Karena $a^2 \geq 0$, maka $a^2 = |a^2| = |aa| = |a||a| = |a|^2$.

(c) Jika $|a| \leq c$, maka $a \leq c$ dan $-a \leq c$ yang berarti $-c \leq a \leq c$. Sebaliknya, jika $-c \leq a \leq c$, maka diperoleh $a \leq c$ dan $-a \leq c$. Jadi, $|a| \leq c$.

(d) Gunakan langkah yang sama seperti pada (c) dengan mengambil $c = |a|$. \square

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang disebut dengan Ketaksamaan Segitiga (*Triangle Inequality*).

1.2.3. Ketaksamaan Segitiga Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Bukti. Dari Teorema 1.2.2(d), diketahui $-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq b \leq |b|$. Dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan diperoleh

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Menggunakan Teorema 1.2.2(c) diperoleh bahwa $|a + b| \leq |a| + |b|$. \square

Akibat 1.2.4. Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka

(a) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

(b) $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Bukti.

(a) Tulis $a = a - b + b$ dan masukkan ke dalam Ketaksamaan Segitiga. Sehingga $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$. Kurangkan kedua ruas dengan $|b|$, diperoleh $|a| - |b| \leq |a - b|$. Gunakan cara yang sama untuk $b = b - a + a$, diperoleh $-|a - b| \leq |a| - |b|$. Kombinasikan kedua ketaksamaan tersebut, diperoleh

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Menggunakan Teorema 1.2.2(c) diperoleh bahwa $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

(b) Gantilah b pada Ketaksamaan Segitiga dengan $-b$, sehingga diperoleh $|a-b| \leq |a| + |-b|$. Karena $|-b| = b$, maka diperoleh bahwa $|a-b| \leq |a| + |b|$. \square

Ketaksamaan segitiga di atas dapat diperluas sehingga berlaku untuk sebarang bilangan real yang banyaknya berhingga.

Akibat 1.2.5. Jika a_1, a_2, \dots, a_n adalah sebarang bilangan real, maka

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

Contoh 1.2.6.

Diberikan fungsi f yang didefinisikan dengan $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ untuk $x \in [2, 3]$.

Tentukan konstanta M sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in [2, 3]$.

$$\text{Diketahui } |f(x)| = \left| \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1} \right| = \frac{|2x^2 - 3x + 1|}{|2x - 1|},$$

$$\begin{aligned} |2x^2 - 3x + 1| &\leq |2x^2| + |-3x| + |1| \\ &= 2|x^2| + 3|x| + 1 \\ &\leq 2|(3)^2| + 3|(3)| + 1 \\ &= 28 \end{aligned}$$

dan

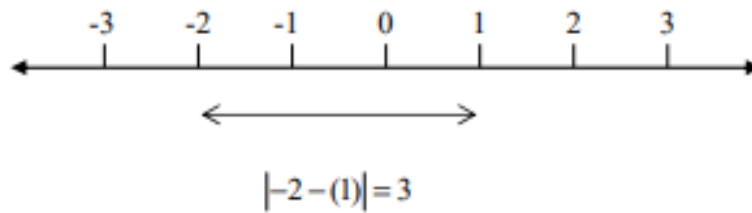
$$\begin{aligned} |2x - 1| &\geq |2x| - |1| \\ &\geq |2(2)| - |1| \\ &= 3. \end{aligned}$$

Sehingga $|f(x)| = \frac{|2x^2 - 3x + 1|}{|2x - 1|} \leq \frac{28}{3}$. Jadi, dengan mengambil $M = \frac{28}{3}$, didapat

$|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in [2, 3]$.

Garis Bilangan Real (The Real Line)

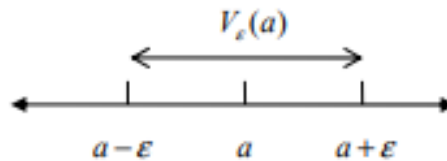
Interpretasi geometri yang dikenal di antaranya garis bilangan real (*real line*). Pada garis real, nilai mutlak $|a|$ dari suatu elemen $a \in \mathbb{R}$ adalah jarak a ke 0. Secara umum, **jarak** (*distance*) antara elemen a dan b di \mathbb{R} adalah $|a - b|$. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.1. Jarak antara $a = -2$ dan $b = 1$.

Definisi 1.2.6. Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$. **Persekitaran- ε** (ε -neighborhood) dari a didefinisikan sebagai himpunan

$$V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$



Gambar 1.2. Persekitaran $V_\varepsilon(a)$.

Dapat dilihat bahwa $x \in V_\varepsilon(a)$ jika dan hanya jika $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Persekitaran juga sering disebut dengan **kitaran**.

Teorema 1.2.7. Diberikan $a \in \mathbb{R}$. Jika x berada dalam persekitaran $V_\varepsilon(a)$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x = a$.

Bukti. Jika x memenuhi $|x - a| < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka berdasarkan Teorema 1.1.10 diperoleh bahwa $|x - a| = 0$, yang berakibat $x = a$. \square

SOAL LATIHAN SUBBAB 1.2

1. Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa:

(a) $|a| = \sqrt{a^2}$,

(b) $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$.

2. Jika $x, y, z \in \mathbb{R}$ dan $x \leq z$, tunjukkan bahwa $x \leq y \leq z$ jika dan hanya jika $|x - y| + |y - z| = |x - z|$.

3. Jika $a < x < b$ dan $a < y < b$, tunjukkan bahwa $|x - y| < b - a$.

4. Carilah semua nilai $x \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $|x + 1| + |x - 2| = 7$.

5. Buatlah sketsa grafik persamaan $y = |x| - |x - 1|$.

6. Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$, dan $a \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $V_\varepsilon(a) \cap V_\delta(a)$ dan $V_\varepsilon(a) \cup V_\delta(a)$ merupakan persekitaran- γ dari a untuk suatu nilai γ .

7. Tunjukkan bahwa jika $a, b \in \mathbb{R}$, dan $a \neq b$, maka terdapat persekitaran- ε U dari a dan V dari b sedemikian hingga $U \cap V = \emptyset$.

8. Tunjukkan bahwa jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka

(a) $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ dan $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

(b) $\min\{a, b, c\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}$.

1.3. Sifat Lengkap \mathbb{R}

Pada bagian ini akan diberikan salah satu sifat dari \mathbb{R} yang sering disebut dengan Sifat Lengkap (*Completeness Property*). Tetapi sebelumnya, perlu dijelaskan terlebih dahulu konsep supremum dan infimum.

Supremum dan Infimum

Berikut ini diperkenalkan konsep tentang batas atas dan batas bawah dari suatu himpunan bilangan real.

Definisi 1.3.1. Diberikan subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$.

- (a) Himpunan S dikatakan **terbatas ke atas** (*bounded above*) jika terdapat suatu bilangan $u \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan u seperti ini disebut dengan **batas atas** (*upper bound*) dari S .
- (b) Himpunan S dikatakan **terbatas ke bawah** (*bounded below*) jika terdapat suatu bilangan $w \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan w seperti ini disebut dengan **batas bawah** (*lower bound*) dari S .
- (c) Suatu himpunan dikatakan **terbatas** (*bounded*) jika terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Jika tidak, maka dikatakan **tidak terbatas** (*unbounded*).

Sebagai contoh, himpunan $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ ini terbatas ke atas, sebab bilangan 2 dan sebarang bilangan lebih dari 2 merupakan batas atas dari S . Himpunan ini tidak mempunyai batas bawah, jadi himpunan ini tidak terbatas ke bawah. Jadi, S merupakan himpunan yang tidak terbatas.

Definisi 1.3.2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} .

- (a) Jika S terbatas ke atas, maka suatu bilangan u disebut **supremum** (batas atas terkecil) dari S jika memenuhi kondisi berikut:
 - (1) u merupakan batas atas S , dan
 - (2) jika v adalah sebarang batas atas S , maka $u \leq v$.Ditulis $u = \sup S$.
- (b) Jika S terbatas ke bawah, maka suatu bilangan w disebut **infimum** (batas bawah terbesar) dari S jika memenuhi kondisi berikut:
 - (1) w merupakan batas bawah S , dan
 - (2) jika t adalah sebarang batas bawah S , maka $t \leq w$.Ditulis $w = \inf S$.

Mudah untuk dilihat bahwa jika diberikan suatu himpunan S subset dari \mathbb{R} , maka hanya terdapat satu supremum, atau supremumnya tunggal. Juga dapat ditunjukkan bahwa jika u' adalah sebarang batas atas dari suatu himpunan tak kosong

S , maka $\sup S \leq u'$, sebab $\sup S$ merupakan batas atas terkecil dari S . Suatu subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ mempunyai empat kemungkinan, yaitu

- (i) mempunyai supremum dan infimum,
- (ii) hanya mempunyai supremum,
- (iii) hanya mempunyai infimum,
- (iv) tidak mempunyai infimum dan supremum.

Setiap bilangan real $a \in \mathbb{R}$ merupakan batas atas dan sekaligus juga merupakan batas bawah himpunan kosong \emptyset . Jadi, himpunan \emptyset tidak mempunyai supremum dan infimum.

Lemma 1.3.3. *Suatu bilangan u merupakan supremum dari subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ jika dan hanya jika u memenuhi kondisi berikut:*

- (1) $s \leq u$ untuk semua $s \in S$,
- (2) jika $v < u$, maka terdapat $s' \in S$ sedemikian hingga $v < s'$.

Lemma 1.3.4. *Diberikan subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$,*

- (a) $u = \sup S$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_1 \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s_1$.
- (b) $w = \inf S$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_2 \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s_2$.

Bukti.

(a) \Rightarrow Diketahui $u = \sup S$ dan diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $u - \varepsilon < u$, maka $u - \varepsilon$ bukan merupakan batas atas S . Oleh karena itu, terdapat $s_1 \in S$ yang lebih besar dari $u - \varepsilon$, sehingga $u - \varepsilon < s_1$.

\Leftarrow Diketahui $u - \varepsilon < s_1$. Jika u merupakan batas atas S , dan jika memenuhi $v < u$, maka diambil $\varepsilon := u - v$. Maka jelas $\varepsilon > 0$, dan diperoleh bahwa $u = \sup S$.

(b) Coba buktikan sendiri.

Contoh 1.3.5.

- (a) Jika suatu himpunan tak kosong S_1 mempunyai elemen sebanyak berhingga, maka dapat dilihat bahwa S_1 mempunyai elemen terbesar, namakan u , dan elemen terkecil, namakan w . Maka $u = \sup S_1$ dan $w = \inf S_1$, dan keduanya merupakan elemen S_1 .
- (b) Himpunan $S_2 := \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ mempunyai batas atas 1. Akan dibuktikan bahwa 1 merupakan supremumnya. Jika $v < 1$, maka terdapat $s' \in S_2$ sedemikian hingga $v < s'$. Oleh karena itu, v bukan merupakan batas atas S_2 dan karena v merupakan sebarang $v < 1$, maka dapat disimpulkan bahwa $\sup S_2 = 1$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\inf S_2 = 0$.

Sifat Lengkap \mathbb{R}

Akan ditunjukkan bahwa subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke atas pasti mempunyai batas atas terkecil. Sifat seperti ini disebut Sifat Lengkap \mathbb{R} . Sifat Lengkap juga sering disebut dengan **Aksioma Supremum \mathbb{R}** .

1.3.6. Sifat Lengkap \mathbb{R} *Jika subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ terbatas ke atas, maka supremumnya ada, yaitu terdapat $u \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $u = \sup S$.*

Akibat 1.3.7. *Jika subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ terbatas ke bawah, maka infimumnya ada, yaitu terdapat $w \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $w = \inf S$.*

Bukti. Misalkan himpunan T terbatas ke bawah, $T \subset \mathbb{R}$. Dibentuk himpunan $S = \{-t : t \in T\}$, maka S terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut Aksioma Supremum, $\sup S$ ada, namakan $u = \sup S$, maka $-u = \inf T$. \square

SOAL LATIHAN SUBBAB 1.3

1. Diberikan $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Apakah S mempunyai batas bawah dan batas atas? Apakah $\inf S$ dan $\sup S$ ada? Buktikan jawabanmu.
2. Diberikan $T := \{1 - (-1)^n / n : n \in \mathbb{N}\}$. Carilah $\inf T$ dan $\sup T$.
3. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup\{-s : s \in S\}$.
4. Tunjukkan bahwa jika A dan B subset terbatas dari \mathbb{R} , maka $A \cup B$ merupakan himpunan terbatas. Tunjukkan bahwa $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.
5. Diberikan $S \subseteq \mathbb{R}$ dan misalkan $s^* := \sup S$ dalam S . Jika $u \notin S$, tunjukkan bahwa $\sup(S \cup \{u\}) = \sup\{s^*, u\}$.
6. Tunjukkan bahwa himpunan berhingga $S \subseteq \mathbb{R}$ memuat supremumnya.
7. Jelaskan dan buktikan Lemma 1.3.3.

1.4. Penggunaan Sifat Aksioma Supremum

Pada subbab ini dibahas beberapa akibat dari aksioma supremum.

Teorema 1.4.1. *Diberikan subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ yang terbatas ke atas dan sebarang $a \in \mathbb{R}$. Didefinisikan himpunan $a + S := \{a + s : s \in S\}$, maka berlaku*

$$\sup(a + S) = a + \sup(S).$$

Bukti. Jika diberikan $u := \sup S$, maka $x \leq u$ untuk semua $x \in S$, sehingga $a + x \leq a + u$. Oleh karena itu, $a + u$ merupakan batas atas dari himpunan $a + S$. Akibatnya $\sup(a + S) \leq a + u$. Selanjutnya, misalkan v adalah sebarang batas atas $a + S$, maka $a + x \leq v$ untuk semua $x \in S$. Akibatnya $x \leq v - a$ untuk semua $x \in S$, sehingga $v - a$ merupakan batas atas S . Oleh karena itu, $u = \sup S \leq v - a$. Karena v adalah sebarang batas atas $a + S$, maka dengan mengganti v dengan $u = \sup S$,

diperoleh $a + u \leq \sup(a + S)$. Di lain pihak diketahui $\sup(a + S) \leq a + u$. Akibatnya terbukti bahwa $\sup(a + S) = a + u = a + \sup S$. \square

Teorema 1.4.2. Diberikan subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ yang terbatas dan sebarang bilangan real $a > 0$. Didefinisikan himpunan $aS := \{as : s \in S\}$, maka berlaku

$$\inf(aS) = a \inf(S).$$

Bukti. Tulis $u = \inf aS$ dan $v = \inf S$. Akan dibuktikan bahwa $u = av$. Karena $u = \inf aS$, maka $u \leq as$, untuk setiap $s \in S$. Karena $v = \inf S$, maka $v \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Akibatnya $av \leq as$ untuk setiap $s \in S$. Berarti av merupakan batas bawah aS . Karena u batas bawah terbesar aS , maka $av \leq u$. Karena $u \leq as$ untuk setiap $s \in S$, maka diperoleh $\frac{u}{a} \leq s$ untuk setiap $s \in S$ (sebab $a > 0$). Karena $v = \inf S$, maka $\frac{u}{a} \leq v$ yang berakibat $u \leq av$. Di lain pihak diketahui $av \leq u$. Akibatnya $u = av$. Jadi, terbukti bahwa $\inf(aS) = a \inf(S)$. \square

Teorema 1.4.3. Jika A dan B subset tak kosong \mathbb{R} dan memenuhi $a \leq b$ untuk semua $a \in A$ dan $b \in B$, maka

$$\sup A \leq \inf B.$$

Bukti. Diambil sebarang $b \in B$, maka $a \leq b$ untuk semua $a \in A$. Artinya bahwa b merupakan batas atas A , sehingga $\sup A \leq b$. Selanjutnya, karena berlaku untuk semua $b \in B$, maka $\sup A$ merupakan batas bawah B . Akibatnya diperoleh bahwa $\sup A \leq \inf B$. \square

Sifat Archimedes

Berikut ini diberikan salah satu sifat yang mengaitkan hubungan antara bilangan real dan bilangan asli. Sifat ini menyatakan bahwa apabila diberikan sebarang bilangan real x , maka selalu dapat ditemukan suatu bilangan asli n yang lebih besar dari x .

1.4.4. Sifat Archimedes. Jika $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x < n$.

Bukti. Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$. Andaikan tidak ada $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x < n$, maka $n \leq x$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, x merupakan batas atas \mathbb{N} . Jadi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \neq \emptyset$, dan \mathbb{N} terbatas ke atas. Menurut aksioma supremum, maka $\sup \mathbb{N}$ ada, tulis $u = \sup \mathbb{N}$. Karena $u - 1 < u$, maka terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan sifat $u - 1 < m$. Akibatnya $u < m + 1$ dengan $m + 1 \in \mathbb{N}$. Timbul kontradiksi dengan $u = \sup \mathbb{N}$. Berarti u batas atas \mathbb{N} , yaitu ada $m + 1 \in \mathbb{N}$ sehingga $u < m + 1$ (u bukan batas atas \mathbb{N}). Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah ada $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x < n$. \square

Akibat 1.4.5. Jika $S := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, maka $\inf S = 0$.

Bukti. Karena $S \neq \emptyset$ terbatas ke bawah oleh 0, maka S mempunyai infimum, tulis $w := \inf S$. Jelas bahwa $w \geq 0$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, menggunakan Sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon} < n$, akibatnya $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa

$$0 \leq w \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Akan tetapi karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka berdasarkan Teorema 1.1.10 berakibat bahwa $w = 0$. Terbukti bahwa $\inf S = 0$. \square

Akibat 1.4.6. Jika $t > 0$, maka terdapat $n_t \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n_t} < t$.

Bukti. Karena $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$ dan $t > 0$, maka t bukan batas bawah himpunan $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Akibatnya terdapat $n_t \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n_t} < t$. \square

Akibat 1.4.7. Jika $y > 0$, maka terdapat $n_y \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n_y - 1 < y < n_y$.

Bukti. Sifat Archimedes menjamin bahwa subset $E_y := \{m \in \mathbb{N} : y < m\}$ dari \mathbb{N} tidak kosong. Menggunakan Sifat Urutan, E_y mempunyai elemen yang paling kecil, yang dinotasikan dengan n_y . Oleh karena itu, $n_y - 1$ bukan elemen E_y . Akibatnya diperoleh bahwa $n_y - 1 < y < n_y$. \square

Eksistensi Bilangan Real dan Densitas Bilangan Rasional di \mathbb{R}

Salah satu penggunaan Sifat Supremum adalah dapat digunakan untuk memberikan jaminan eksistensi bilangan-bilangan real. Berikut ini akan ditunjukkan bahwa ada bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$.

Teorema 1.4.8. Ada bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$.

Bukti. Dibentuk himpunan $S = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0 \text{ dan } s^2 < 2\}$. Jelas bahwa $S \neq \emptyset$ sebab $0 \in S$ dan $1 \in S$. S terbatas ke atas dengan salah satu batas atasnya adalah 2. Jika $t \geq 2$, maka $t^2 \geq 4$. Jadi, $t = 2 \notin S$. Menggunakan Aksioma Supremum, $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, dan S terbatas ke atas, maka S mempunyai supremum. Namakan $x = \sup S$, dengan $x \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa $x^2 = 2$. Andaikan $x^2 \neq 2$, maka $x^2 < 2$ atau $x^2 > 2$.

Kemungkinan I: Untuk $x^2 < 2$.

Karena $x^2 < 2$, maka $2 - x^2 > 0$. Karena $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, maka

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{1}{n}(2x + 1).$$

Karena $2 - x^2 > 0$ dan $2x + 1 > 0$, maka $\frac{2 - x^2}{2x + 1} > 0$. Menurut akibat Sifat Archimedes,

dapat ditemukan $n \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\frac{1}{n} < \frac{2-x^2}{2x+1}.$$

Akibatnya

$$\frac{1}{n}(2x+1) < 2-x^2$$

dan

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < x^2 + \frac{1}{n}(2x+1) < x^2 + 2 - x^2 = 2.$$

Diperoleh bahwa $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$, yang berarti bahwa $x + \frac{1}{n} \in S$. Kontradiksi dengan $x = \sup S$. Oleh karena itu tidak mungkin $x^2 < 2$.

Kemungkinan II: $x^2 > 2$.

Karena $x^2 > 2$, maka $x^2 - 2 > 0$. Perhatikan bahwa

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 = x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} > x^2 - \frac{2x}{m}.$$

Karena $x^2 - 2 > 0$ dan $2x > 0$, maka dipilih $m \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga

$$m > \frac{2x}{x^2 - 2} \text{ atau } \frac{2x}{m} < x^2 - 2.$$

Akibatnya

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 > x^2 - \frac{2x}{m} > x^2 - (x^2 - 2) = 2.$$

Diperoleh bahwa $\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 > 2$. Berarti $x - \frac{1}{m} \notin S$, yaitu $x - \frac{1}{m}$ batas atas. Kontradiksi dengan $x = \sup S$. Oleh karena itu, tidak mungkin $x^2 > 2$. Jadi, pengandaianya salah, yang benar adalah $x^2 = 2$. \square

1.4.9. Teorema Densitas (The Density Theorem) *Jika $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x < y$, maka ada bilangan rasional $q \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $x < q < y$.*

Bukti. Dengan tidak mengurangi keumuman (*without loss of generality*), diambil $x > 0$. Karena $x < y$, maka $y > 0$ dan $y - x > 0$. Akibatnya $\frac{1}{y-x} > 0$, sehingga dapat dipilih $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga

$$n > \frac{1}{y-x}.$$

Untuk n di atas, berlaku $ny - nx > 1$, yaitu $nx + 1 < ny$. Karena $nx > 0$, maka dapat dipilih $m \in \mathbb{N}$ sehingga

$$m - 1 \leq nx < m.$$

Bilangan m di atas juga memenuhi $m < ny$, sebab dari $m - 1 \leq nx$ diperoleh $m \leq nx + 1 < ny$. Jadi

$$nx < m < ny.$$

Akibatnya untuk $q = \frac{m}{n}$ mempunyai sifat $x < \frac{m}{n} = q < y$. Jadi, terdapat bilangan rasional $q = \frac{m}{n}$ dengan sifat $x < q < y$. □

Berikut ini diberikan akibat dari Teorema Densitas, yaitu di antara dua bilangan real pasti dapat ditemukan bilangan irrasional.

Akibat 1.4.10. *Jika $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x < y$, maka ada bilangan irrasional r sedemikian hingga $x < r < y$.*

Bukti. Menggunakan Teorema Densitas, ada bilangan real $\frac{x}{\sqrt{2}}$ dan $\frac{y}{\sqrt{2}}$ dengan sifat ada bilangan rasional q dengan sifat $\frac{x}{\sqrt{2}} < q < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Akibatnya, $x < q\sqrt{2} < y$ dan $q\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional. □

SOAL LATIHAN SUBBAB 1.4

1. Diberikan himpunan tak kosong X dan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mempunyai range terbatas di \mathbb{R} . Jika $a \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa:
 - (a) $\sup\{a + f(x) : x \in X\} = a + \sup\{f(x) : x \in X\}$.
 - (b) $\inf\{a + f(x) : x \in X\} = a + \inf\{f(x) : x \in X\}$.
2. Diberikan subset tak kosong A dan B dari \mathbb{R} . Dibentuk himpunan $A+B := \{a+b : a \in A \text{ dan } b \in B\}$. Buktikan bahwa $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ dan $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.
3. Jika diberikan sebarang $x \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa terdapat dengan tunggal $n \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $n-1 \leq x < n$.
4. Jika $y > 0$, tunjukkan bahwa terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{2^n} < y$.
5. Jika $u > 0$ adalah sebarang bilangan real dan $x < y$, tunjukkan bahwa terdapat bilangan rasional r sedemikian hingga $x < ru < y$.

1.5. Interval dalam \mathbb{R}

Jika diberikan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$, maka **interval terbuka** yang ditentukan oleh a dan b adalah himpunan

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Titik a dan b disebut **titik ujung** (*endpoints*) interval. Titik ujung tidak termuat dalam interval terbuka. Jika kedua titik ujung digabungkan ke dalam interval terbukanya, maka disebut **interval tertutup**, yaitu himpunan

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Interval **setengah terbuka** atau **setengah tertutup** adalah interval yang memuat salah satu titik ujungnya. Gabungan interval terbuka dengan titik ujung a , ditulis $[a, b)$, dan gabungan interval terbuka dengan titik ujung b , ditulis $(a, b]$. Masing-masing interval tersebut terbatas dan mempunyai **panjang** (*length*) yang didefinisikan dengan $b - a$. Jika $a = b$, maka interval terbukanya berkorespondensi dengan himpunan kosong

$(a, a) = \emptyset$, dan interval tertutupnya berkorespondensi dengan himpunan singleton $[a, a] = \{a\}$.

Berikut ini diberikan lima jenis interval tidak terbatas. Simbol ∞ (atau $+\infty$) dan $-\infty$ digunakan sebagai simbol titik ujungnya yang tak berhingga. **Interval terbuka tak terbatas** adalah himpunan dengan bentuk

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \text{ dan } (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

Himpunan pertama tidak mempunyai batas atas dan yang kedua tidak mempunyai batas bawah. Himpunan (a, ∞) sering juga disebut dengan **sinar terbuka** (*open a ray*).

Diberikan **interval tertutup tak terbatas**, yaitu

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \text{ dan } (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}.$$

Himpunan $[a, \infty)$ sering disebut dengan **sinar tertutup** (*close a ray*). Himpunan \mathbb{R} dapat dituliskan sebagai $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa ∞ dan $-\infty$ bukan elemen \mathbb{R} .

1.5.1. Teorema Karakteristik Interval *Jika S adalah subset \mathbb{R} yang memuat paling sedikit dua titik dan mempunyai sifat:*

$$\text{jika } x, y \in S \text{ dan } x < y, \text{ maka } [x, y] \subseteq S,$$

maka S merupakan suatu interval.

Interval Susut (Nested Intervals)

Telah diketahui bahwa barisan adalah fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow A \neq \emptyset$. Jika A adalah himpunan interval-interval, maka terbentuk barisan interval $\{I_n\}_{n \geq 1}$. Untuk mempersingkat penulisan, barisan $\{I_n\}_{n \geq 1}$ cukup ditulis I_n .

Definisi 1.5.2. (Interval Susut) Barisan I_n , $n \in \mathbb{N}$ dikatakan **interval susut** (*nested intervals*) jika

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

Contoh 1.5.3.

(1) Diberikan $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Yaitu $I_1 = [0, 1]$, $I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $I_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$,

Maka $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ (*nested*) dan $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ (mempunyai titik berserikat).

(2) Diberikan $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Diperoleh bahwa $I_n \supset I_{n+1}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Tetapi $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$. Jadi, interval susut belum tentu mempunyai titik berserikat.

Sebab, andaikan terdapat $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, maka $x \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena

$x > 0$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{n} < x$. Kontradiksi dengan

pengandaian. Jadi pengandaian salah, yang benar adalah $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

(3) Diberikan $I_n = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right]$, maka $I_1 = [0, 2]$, $I_2 = \left[0, 1\frac{1}{2}\right]$, $I_3 = \left[0, 1\frac{1}{3}\right]$,

Diperoleh $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [0, 1] \neq \emptyset$. (Ada tak hingga banyak $\xi \in [0, 1]$). Perhatikan

bahwa $\inf \left\{ 1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1$.

1.5.4. Sifat Interval Susut (*Nested Interval Property*) Jika $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ interval tertutup terbatas dan $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ (*interval susut*), maka

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset,$$

yaitu terdapat $\xi \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $\xi \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, jika panjang $I_n = b_n - a_n$ memenuhi $\inf \{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, maka elemen berserikat ξ tersebut tunggal.

Bukti. Dibentuk himpunan $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Jelas $A \neq \emptyset$ sebab $a_1 \in A$, dan $A \subset \mathbb{R}$. Himpunan A terbatas ke atas, sebab $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh bahwa

$$a_n \leq b_n$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, yang berarti b_1 batas atas A . Menggunakan Sifat Lengkap \mathbb{R} , maka supremum A ada, yaitu terdapat $\xi \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $\xi = \sup A$. Jelas bahwa

$$a_m \leq \xi$$

untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, untuk sebarang $m, n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_n \text{ atau } a_n \leq b_m.$$

Hal ini berakibat

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq b_m \text{ atau } \xi \leq b_m.$$

Karena $a_m \leq \xi$ dan $\xi \leq b_m$, maka diperoleh $a_m \leq \xi \leq b_m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, berarti $\xi \in I_n = [a_n, b_n]$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n,$$

yang berakibat $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Jika $\eta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, maka dengan cara yang sama (sebelumnya), diperoleh $\eta \in I_m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh

$$\eta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Akan dibuktikan ketunggalannya, yaitu $\eta = \xi$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Jika $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga

$$0 \leq \eta - \xi \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon \text{ atau } 0 \leq \eta - \xi < \varepsilon.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\eta - \xi = 0$ atau $\eta = \xi$. Jadi, terbukti bahwa

$$\eta = \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \text{ tunggal.} \quad \square$$

Himpunan Terhitung (Countable)

Diberikan $\mathcal{J}_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dua himpunan A dan B dikatakan **ekuivalen**, ditulis $A \sim B$ jika ada fungsi bijektif $f: A \rightarrow B$. Contoh:

1. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$, maka $A \sim B$.
2. Misalkan $f: A \rightarrow C$ dengan $C = \{w, x, y, z\}$, maka $A \not\sim C$.

Suatu himpunan dikatakan **tak berhingga** (*infinite*) jika himpunan tersebut ekuivalen dengan salah satu himpunan bagian sejatinya. Jika tidak demikian, maka himpunan tersebut dikatakan **berhingga** (*finite*), yaitu ekuivalen dengan \mathcal{J}_n . Contoh:

1. Himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ berhingga.
2. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $T = \{2, 4, 6, \dots\} \subset \mathbb{N}$. fungsi

$$f: \mathbb{N} \rightarrow T$$
$$n \mapsto f(n) = 2n$$

Jadi, \mathbb{N} tak berhingga, T juga tak berhingga.

Suatu himpunan D dikatakan **denumerable** jika $D \sim \mathbb{N}$. Suatu himpunan dikatakan **terhitung** (*countable*) jika himpunan tersebut berhingga atau *denumerable*. Jika tidak, maka dikatakan himpunan **tak terhitung** (*uncountable* atau *non denumerable*), yaitu himpunan yang tidak ekuivalen dengan \mathbb{N} . Jika himpunan A terhitung, maka A dapat disajikan sebagai $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ dengan $x_i \neq x_j$ untuk $i \neq j$.

Contoh:

1. Himpunan \emptyset terhitung berhingga.
2. Himpunan \mathbb{N} terhitung tak berhingga.
3. Himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ terhitung berhingga.

Dapat ditunjukkan bahwa \mathbb{R} merupakan himpunan tak terhitung. Untuk membuktikannya cukup hanya dengan membuktikan $I = [0, 1]$ tak terhitung. Berikut ini diberikan teoremanya.

Teorema 1.5.5. Himpunan $I = [0,1]$ tak terhitung.

Bukti. Andaikan I terhitung, maka dapat ditulis dengan

$$I = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}.$$

Dikonstruksikan barisan interval tertutup, terbatas, susut (*nested*), dan $\inf \{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Interval $I = [0,1]$ dibagi menjadi tiga sama panjang, yaitu

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \text{ dan } \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Titik $x_1 \in I$ termuat dalam paling banyak dua sub interval. Pilih sub interval yang tidak memuat x_1 , namakan $I_1 = [a_1, b_1]$. Jadi, $x_1 \notin I_1$. Selanjutnya, I_1 dibagi menjadi tiga sama panjang, yaitu

$$\left[a_1, a_1 + \frac{1}{9}\right], \left[a_1 + \frac{1}{9}, a_1 + \frac{2}{9}\right], \text{ dan } \left[a_1 + \frac{2}{9}, b_1\right].$$

Kemudian pilih sub interval yang tidak memuat x_2 , namakan $I_2 = [a_2, b_2]$. Jadi, $x_2 \notin I_2$.

Jika proses diteruskan, diperoleh barisan interval tertutup, terbatas, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n$ dengan $\inf \{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf \left\{\frac{1}{3^n}\right\}$. Menggunakan sifat

Nested Interval, maka terdapat dengan tunggal $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Berarti $y \in I$, yaitu $y = x_n$

untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya $x_n \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, yaitu $x_n \in I_n$. Sedangkan dari konstruksi

diperoleh $x_n \notin I_n$. Timbul kontradiksi, yang benar adalah $I = [0,1]$ tak terhitung, sehingga \mathbb{R} juga tak terhitung. □

Teorema Bolzano-Weierstrass

Sebelum dijelaskan tentang Teorema Bolzano-Weierstrass, terlebih dahulu dijelaskan mengenai titik cluster. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 1.5.6. (Titik Cluster) Diberikan subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$. Titik $x \in \mathbb{R}$ disebut **titik cluster** (*cluster points*) jika setiap persekitaran $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ memuat paling sedikit satu titik anggota S yang tidak sama dengan x . Titik cluster sering disebut dengan **titik akumulasi** atau **titik limit**.

Dengan kata lain, x titik cluster S jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $(V_\varepsilon(x) \cap S) - \{x\} \neq \emptyset$ atau $(V_\varepsilon(x) - \{x\}) \cap S \neq \emptyset$.

Ekuivalen dengan mengatakan bahwa x titik cluster S jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, terdapat $s_n \in S$ sedemikian hingga $0 < |s_n - x| < \frac{1}{n}$.

Contoh 1.5.7.

(1) Diberikan $S = (0, 2)$. Apakah 0 merupakan titik cluster?

Jawab. Diambil $\varepsilon > 0$, maka $V_\varepsilon(0) = (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Menggunakan Teorema Densitas, maka 0 merupakan titik cluster S dan $0 \notin S$. Demikian juga bahwa $\frac{1}{2}$ merupakan titik cluster S dan $\frac{1}{2} \in S$.

(2) Diberikan $A = [1, 2] \cup \{4\}$. Apakah 4 titik cluster?

Jawab. Persekitaran- ε dari 4 adalah $V_\varepsilon(4) = (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$. Misal diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}$, maka $V_\varepsilon(4) = \left(4 - \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}\right) = \left(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$. Sehingga diperoleh bahwa $\left(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right) \cap [1, 2] - \{4\} = \emptyset$. Jadi, 4 bukan titik cluster.

(3) Diberikan $B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$. Tunjukkan bahwa 0 titik cluster B dengan $0 \notin B$.

Jawab. Menggunakan Sifat Archimedes, jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Persekitaran titik 0 adalah

$V_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Jika dipilih ε sangat kecil, maka $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Jadi, 0 merupakan titik cluster B dengan $0 \notin B$.

1.5.8. Teorema Bolzano-Weierstrass *Setiap subset \mathbb{R} yang tak berhingga (infinite) dan terbatas, mempunyai paling sedikit satu titik cluster.*

Bukti. Diberikan sebarang subset $S \subset \mathbb{R}$ tak berhingga dan terbatas. Karena S terbatas, maka terdapat interval $I_1 = [a, b]$ dengan panjang $\mathcal{L}(I_1) = b - a$. Kemudian bagilah I_1 menjadi dua bagian, yaitu $\left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ dan $\left[\frac{a+b}{2}, b \right]$. Karena S tak berhingga, maka salah satu interval tersebut memuat tak hingga banyak titik anggota S , sebab apabila keduanya memuat berhingga banyak anggota S , maka berarti himpunan S berhingga. Namakan bagian yang memuat tak hingga banyak titik anggota S dengan I_2 . Panjangnya $\mathcal{L}(I_2) = \frac{b-a}{2}$. Selanjutnya, I_2 dibagi menjadi dua bagian seperti langkah di atas, maka salah satu bagian memuat tak hingga banyak anggota S . Namakan bagian tersebut dengan I_3 . Panjangnya $\mathcal{L}(I_3) = \frac{b-a}{2^2}$. Apabila proses diteruskan, maka diperoleh barisan interval susut (*nested*)

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

Menurut Sifat Interval Susut, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$, atau terdapat $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Akan ditunjukkan bahwa x titik cluster S . Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{b-a}{2^{n-1}} < \varepsilon$, dan persekitarannya $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Karena $x \in I_n$ dan $\mathcal{L}(I_n) = \frac{b-a}{2^{n-1}} < \varepsilon$, maka $I_n \subseteq V_\varepsilon(x)$. Karena I_n memuat tak hingga banyak titik anggota S , maka $V_\varepsilon(x)$ memuat tak hingga banyak titik anggota S yang tidak sama dengan x . Jadi, x merupakan titik cluster S . \square

Himpunan Terbuka dan Tertutup

Definisi 1.5.9.

- (i) Himpunan $G \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan **terbuka** dalam \mathbb{R} jika untuk setiap $x \in G$, terdapat persekitaran $V_\varepsilon(x)$ sedemikian hingga $V_\varepsilon(x) \subset G$.
- (ii) Himpunan $F \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan **tertutup** dalam \mathbb{R} jika komplementen F , yaitu F^c terbuka dalam \mathbb{R} .

Contoh 1.5.10.

- (1) Himpunan $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ terbuka, sebab untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, terdapat $V_1(x) = (x-1, x+1) \subset \mathbb{R}$.
- (2) Himpunan $A = (0, 1)$ terbuka, sebab jika diambil $\varepsilon = \min\left\{\frac{x}{2}, \frac{x-1}{2}\right\}$ untuk setiap $x \in A$, maka $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.
- (3) Himpunan $B = [1, 2]$ tertutup, sebab jika diambil $x = 1$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \not\subset B$ dan $1-\varepsilon \notin B$. Dapat ditunjukkan juga bahwa B^c terbuka, yaitu $B^c = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ terbuka.

1.5.11. Sifat Himpunan Terbuka

- (a) Jika A himpunan indeks (berhingga atau tak berhingga) dan G_λ terbuka untuk setiap $\lambda \in A$, maka $\bigcup_{\lambda \in A} G_\lambda$ terbuka.
- (b) Jika G_1, G_2, \dots, G_n masing-masing merupakan himpunan terbuka, maka $\bigcap_{i=1}^n G_i$ terbuka.

Bukti.

- (a) Namakan $G = \bigcup_{\lambda \in A} G_\lambda$. Diambil sebarang $x \in G$, maka terdapat $\lambda_0 \in A$ sedemikian hingga $x \in G_{\lambda_0}$. Karena G_{λ_0} terbuka, maka terdapat

$V_\varepsilon(x) \subset G_0 \subset G$. Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $x \in G$, terdapat $V_\varepsilon(x) \subset G$, yang berarti $G = \bigcup_{\lambda \in A} G_\lambda$ terbuka.

(b) Namakan $H = \bigcap_{i=1}^n G_i$. Akan ditunjukkan bahwa H terbuka. Diambil sebarang $x \in H$, maka $x \in G_i, i=1,2,\dots,n$.

Karena $x \in G_1$ dan G_1 terbuka, maka terdapat $\varepsilon_1 > 0$ sehingga $V_{\varepsilon_1}(x) \subset G_1$.

Karena $x \in G_2$ dan G_2 terbuka, maka terdapat $\varepsilon_2 > 0$ sehingga $V_{\varepsilon_2}(x) \subset G_2$.

Demikian seterusnya.

Karena $x \in G_n$ dan G_n terbuka, maka terdapat $\varepsilon_n > 0$ sehingga $V_{\varepsilon_n}(x) \subset G_n$.

Namakan $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$, jelas bahwa $\varepsilon > 0$. Maka $V_\varepsilon(x) \subset V_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i$

untuk setiap $i=1,2,\dots,n$, yang berakibat bahwa $V_\varepsilon(x) \subset H = \bigcap_{i=1}^n G_i$. Jadi,

terbukti bahwa $\bigcap_{i=1}^n G_i$ terbuka. □

Berikut ini diberikan akibat dari sifat himpunan terbuka, yaitu sifat untuk himpunan tertutup.

kitab 1.5.12.

(a) Jika A himpunan indeks (berhingga atau tak berhingga) dan G_λ tertutup untuk setiap $\lambda \in A$, maka $\bigcup_{\lambda \in A} G_\lambda$ tertutup.

(b) Jika G_1, G_2, \dots, G_n masing-masing merupakan himpunan tertutup, maka

$$\bigcap_{i=1}^n G_i \text{ tertutup.}$$

SOAL LATIHAN SUBBAB 1.5

1. Jika $I := [a, b]$ dan $I' := [a', b']$ interval tertutup dalam \mathbb{R} , tunjukkan bahwa $I \subseteq I'$ jika dan hanya jika $a' \leq a$ dan $b \leq b'$.
2. Jika $S \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong, tunjukkan bahwa S terbatas jika dan hanya terdapat interval tertutup terbatas I sedemikian hingga $S \subseteq I$.
3. Jika $S \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong dan terbatas, dan $I_S := [\inf S, \sup S]$, tunjukkan bahwa $S \subseteq I_S$. Selanjutnya, jika J adalah sebarang interval tertutup terbatas yang memuat S , tunjukkan bahwa $I_S \subseteq J$.
4. Diberikan $K_n := (n, \infty)$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$.
5. Jika S himpunan terbatas di \mathbb{R} dan $T \subset S$ tidak kosong, buktikan bahwa $\inf S \leq \inf T \leq \sup T \leq \sup S$.
6. Buktikan Akibat 1.5.1.2.(b).

Pada bab ini dibahas mengenai pengertian barisan dan deret. Selanjutnya, dibahas tentang limit dan konvergensi dari suatu barisan. Di antaranya adalah Teorema Konvergen Monoton, Teorema Bolzano-Weierstrass, dan Kriteria Cauchy untuk barisan yang konvergen.

2.1. Barisan dan Limit Barisan

Barisan (*sequence*) pada himpunan S adalah suatu fungsi dengan domain \mathbb{N} dan mempunyai range dalam S . Pada subbab ini akan dibahas mengenai barisan di \mathbb{R} dan konvergensi dari suatu barisan.

Definisi 2.1.1. Barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan \mathbb{N} dengan range dalam \mathbb{R} .

Dengan kata lain, barisan dalam \mathbb{R} mengawankan setiap bilangan asli $n = 1, 2, 3, \dots$ kepada suatu bilangan real. Jika $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan barisan, maka biasanya dituliskan dengan nilai dari X pada n dengan notasi x_n . Barisan sering dinotasikan dengan X atau (x_n) atau $(x_n : n \in \mathbb{N})$ atau $\{x_n\}$ atau $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Apabila diketahui suatu barisan Y , artinya $Y = (y_k)$.

Contoh 2.1.2.

- (a) Barisan (x_n) dengan $x_n = (-1)^n$ adalah barisan $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$
- (b) Barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{2^n}$, $\left(\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$
- (c) Barisan konstan (k_n) dengan $k_n = 3$ adalah $3, 3, 3, 3, \dots$

$$(d) \text{ Barisan } \left(\frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

Definisi 2.1.3. Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n) , dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Maka dapat didefinisikan

$$(i) \quad (x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n).$$

$$(ii) \quad \alpha(x_n) = (\alpha x_n).$$

$$(iii) \quad (x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n).$$

$$(iv) \quad \frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n} \right), \text{ asalkan } y_n \neq 0.$$

Definisi 2.1.4. (Limit Barisan) Diketahui (x_n) barisan bilangan real. Suatu bilangan real x dikatakan **limit** barisan (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Jika x adalah limit suatu barisan (x_n) , maka dikatakan (x_n) **konvergen** ke x , atau (x_n) mempunyai limit x . Dalam hal ini ditulis $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$ atau $\lim(x_n) = x$ atau $x_n \rightarrow x$. Jika (x_n) tidak konvergen, maka (x_n) dikatakan **divergen**.

Teorema 2.1.5. *Jika barisan (x_n) konvergen, maka (x_n) mempunyai paling banyak satu limit (limitnya tunggal).*

Bukti. Andaikan $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x'$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x''$ dengan $x' \neq x''$. Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat K' sedemikian hingga $|x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K'$, dan terdapat K'' sedemikian hingga $|x_n - x''| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K''$. Dipilih $K = \max\{K', K''\}$. Menggunakan Ketaksamaan Segitiga, maka untuk $n \geq K$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 |x' - x''| &= |x' - x_n + x_n - x''| \\
 &= |x' - x_n| + |x_n - x''| \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x' - x'' = 0$ yang berarti $x' = x''$. Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi, terbukti bahwa limitnya tunggal. \square

Teorema 2.1.6. *Jika (x_n) barisan bilangan real dan $x \in \mathbb{R}$, maka empat pernyataan berikut ekuivalen.*

- (a) Barisan (x_n) konvergen ke x .
- (b) Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.
- (c) Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.
- (d) Untuk setiap persekitaran $V_\varepsilon(x)$ dari x , terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $x_n \in V_\varepsilon(x)$.

Bukti.

(a) \Rightarrow (b) Jelas (dari definisi).

(b) \Rightarrow (c) $|x_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

(c) \Rightarrow (d) $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Leftrightarrow x_n \in V_\varepsilon(x)$.

(d) \Rightarrow (a) $x_n \in V_\varepsilon(x) \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$. \square

Contoh 2.1.7.

(a) Tunjukkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Jawab. Akan ditunjukkan bahwa $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke 0, yaitu $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Harus dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Menurut Sifat Archimedes, maka terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon} < K(\varepsilon)$, atau $\frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$. Akibatnya untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$. Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, atau $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

(b) Tunjukkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Jawab. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\varepsilon^{\frac{1}{2}} > 0$, akibatnya $\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} > 0$. Menurut Sifat Archimedes, terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < K(\varepsilon)$ atau $\frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, diperoleh $\frac{1}{K(\varepsilon)^2} < \varepsilon$. Akibatnya untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)^2} < \varepsilon$. Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$, atau $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Contoh 2.1.8. Tunjukkan bahwa $((-1)^n)$ divergen.

Jawab. Andaikan $((-1)^n)$ konvergen, berarti terdapat bilangan real x sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|(-1)^n - x| < 1$. Untuk $n \geq K$ dan n genap, maka $(-1)^n = 1$, diperoleh

$$|1 - x| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - x < 1,$$

yang berakibat $x > 0$. Untuk $n \geq K$ dan n ganjil, maka $(-1)^n = -1$, diperoleh

$$|-1 - x| < 1 \Leftrightarrow -1 < -1 - x < 1,$$

yang berakibat $x < 0$. Timbul kontradiksi, yaitu $x > 0$ dan $x < 0$. Jadi pengandaian salah, yang benar $((-1)^n)$ divergen.

Teorema 2.1.9. Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n : n \in \mathbb{N})$ dan $m \in \mathbb{N}$. Maka $X_m = (x_{m+n} : n \in \mathbb{N})$ konvergen jika dan hanya jika X konvergen. Dalam hal ini $\lim X_m = \lim X$.

Bukti. Perhatikan bahwa untuk sebarang $p \in \mathbb{N}$, elemen ke- p dari X_m adalah elemen ke- $(p+m)$ dari X . Sama halnya, jika $q > m$, maka bentuk elemen ke- q dari X_m adalah elemen ke- $(q-m)$ dari X .

Diasumsikan bahwa X konvergen ke x . Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, pada barisan X untuk $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$, maka pada X_m untuk $k \geq K(\varepsilon) - m$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$. Dapat diambil $K_m(\varepsilon) = K(\varepsilon) - m$, sehingga X_m konvergen ke x .

Sebaliknya, jika pada X_m untuk $k \geq K_m(\varepsilon)$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$, maka pada X untuk $n \geq K(\varepsilon) + m$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Dapat diambil $K(\varepsilon) = K_m(\varepsilon) + m$. Dengan demikian terbukti bahwa X konvergen ke x jika dan hanya jika X_m konvergen ke x . \square

Teorema 2.1.10. Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan $x \in \mathbb{R}$. Jika (a_n) adalah suatu barisan bilangan real positif dengan $\lim(a_n) = 0$ dan jika untuk $c > 0$ dan $m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|x_n - x| \leq ca_n \quad \text{untuk semua } n \geq m,$$

maka $\lim(x_n) = x$.

Bukti. Diambil $\varepsilon > 0$, maka $\frac{\varepsilon}{c} > 0$. Karena $\lim(a_n) = 0$, maka terdapat $K\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)$ berlaku $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{c}$. Akibatnya untuk setiap $n \geq K\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)$ berlaku $|x_n - x| \leq c|a_n| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ atau $|x_n - x| < \varepsilon$. Terbukti bahwa $\lim(x_n) = x$. □

Contoh 2.1.11. Jika $a > 0$, tunjukkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+na} = 0$.

Jawab. Karena $a > 0$, maka $0 < na < 1+na$ yang berakibat bahwa

$$0 < \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a} \quad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Diperoleh

$$\left| \frac{1}{1+na} - 0 \right| = \left| \frac{1}{1+na} \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot \left| \frac{1}{n} \right| \quad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Karena telah diketahui bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, maka menurut Teorema 2.1.10 dan dengan

mengambil $c = \frac{1}{a} > 0$ berakibat bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+na} = 0$.

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.1

1. Tuliskan lima bilangan pertama dari barisan (x_n) untuk x_n berikut.

(a) $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$.

(b) $x_n := \frac{1}{n^2 + 2}$.

2. Tentukan rumus ke- n untuk barisan berikut.

(a) 5, 7, 9, 11,

(b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$

3. Untuk sebarang $b \in \mathbb{R}$, buktikan bahwa $\lim\left(\frac{b}{n}\right) = 0$.

4. Tunjukkan (menggunakan definisi limit barisan).

(a) $\lim\left(\frac{2n}{n+1}\right) = 2$.

(b) $\lim\left(\frac{n^2 - 1}{2n^2 + 3}\right) = \frac{1}{2}$.

5. Tunjukkan bahwa $\lim(x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim(|x_n|) = 0$.

6. Tunjukkan bahwa jika $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan $\lim(x_n) = 0$, maka $\lim(\sqrt{x_n}) = 0$.

7. Buktikan bahwa jika $\lim(x_n) = x$ dan jika $x > 0$, maka terdapat $M \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x_n > 0$ untuk semua $n \geq M$.

8. Tunjukkan bahwa $\lim\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 0$.

9. Tunjukkan bahwa $\lim\left(\frac{n^2}{n!}\right) = 0$.

10. Jika $\lim(x_n) = x > 0$, tunjukkan bahwa terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika

$$n \geq K, \text{ maka } \frac{1}{2}x < x_n < 2x.$$

2.2. Teorema-teorema Limit

Pada subbab ini akan dibahas mengenai beberapa teorema yang berkaitan dengan limit pada barisan bilangan real, seperti barisan terbatas dan kekonvergenan barisan.

Definisi 2.2.1. Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan **terbatas** jika terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Oleh karena itu, barisan (x_n) terbatas jika dan hanya jika himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ merupakan subset terbatas dalam \mathbb{R} .

Teorema 2.2.2. Jika $X = (x_n)$ konvergen, maka $X = (x_n)$ terbatas.

Bukti. Diketahui $X = (x_n)$ konvergen, misalkan konvergen ke x . Diambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < 1$. Menggunakan akibat Ketaksamaan Segitiga, maka $|x_n| - |x| < 1$ atau $|x_n| < 1 + |x|$ untuk semua $n \geq K$. Namakan $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{K-1}, |x| + 1\}$, maka $|x_n| \leq M$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jadi, terbukti bahwa $X = (x_n)$ terbatas. \square

Teorema 2.2.3. Jika $X = (x_n) \rightarrow x$, $Y = (y_n) \rightarrow y$, dan $c \in \mathbb{R}$, maka

- (i) $X \pm Y \rightarrow x + y$.
- (ii) $X \cdot Y \rightarrow xy$.
- (iii) $cX \rightarrow cx$.

Bukti.

- (i) Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $X = (x_n) \rightarrow x$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Karena $Y = (y_n) \rightarrow y$, maka

terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_1$ berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pilih

$n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, maka akibatnya untuk $n \geq n_2$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $(x_n + y_n)$ konvergen ke $x + y$.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa $(x_n - y_n)$ konvergen ke $x - y$. Jadi, terbukti bahwa $X \pm Y \rightarrow x \pm y$.

- (ii) Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$. Diketahui

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n| |y_n - y| + |x_n - x| |y|. \end{aligned}$$

Karena $(x_n) \rightarrow x$, maka (x_n) terbatas, akibatnya terdapat $M_1 > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M_1$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Namakan $M = \max\{M_1, |y|\}$. Diambil

sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $(x_n) \rightarrow x$, maka terdapat $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_1$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Karena $(y_n) \rightarrow y$, maka terdapat

$K_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_2$ berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Namakan

$K = \max\{K_1, K_2\}$, maka untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq |x_n| |y_n - y| + |x_n - x| |y| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$. Dengan kata lain, terbukti bahwa $X \cdot Y \rightarrow xy$.

(iii) Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $(x_n) \rightarrow x$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |cx_n - x| &= |cx_n - x_n + x_n - x| \\ &\leq |cx_n - x_n| + |x_n - x| \\ &= |x_n||c-1| + |x_n - x|. \end{aligned}$$

Karena $(x_n) \rightarrow x$, maka (x_n) terbatas, yaitu terdapat $M > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya

$$|x_n||c-1| + |x_n - x| < M \cdot |c-1| + \frac{\varepsilon}{2} = (M \cdot |c-1|) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|cx_n - x| < \varepsilon$. Dengan kata lain, terbukti bahwa $cX \rightarrow cx$. \square

Teorema 2.2.4. Jika $X = (x_n) \rightarrow x$ dan $Z = (z_n) \rightarrow z \neq 0$ dengan $z_n \neq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka

$$\frac{X}{Z} = \left(\frac{x_n}{z_n} \right) \rightarrow \frac{x}{z}.$$

Bukti. Terlebih dahulu harus dibuktikan bahwa $\frac{1}{Z} = \left(\frac{1}{z_n} \right) \rightarrow \frac{1}{z}$. Diambil $\alpha = \frac{1}{2}|z|$, maka $\alpha > 0$. Karena $\lim(z_n) = z$, maka terdapat $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_1$ berlaku $|z_n - z| < \alpha$. Menggunakan akibat Ketaksaman Segitiga bahwa $-\alpha \leq -|z_n - z| \leq |z_n| - |z|$ untuk $n \geq K_1$, yang berarti $\frac{1}{2}|z| = |z| - \alpha \leq |z_n|$ untuk $n \geq K_1$.

Oleh karena $\frac{1}{|z_n|} \leq \frac{2}{|z|}$ untuk $n \geq K_1$, maka diperoleh

$$\left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{z - z_n}{z_n z} \right| = \frac{1}{|z_n z|} \leq \frac{2}{|z|^2} |z - z_n|.$$

Selanjutnya, diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $n \geq K_2$, maka $|z_n - z| < \frac{1}{2} \varepsilon |z|^2$. Jika diambil $K(\varepsilon) = \max\{K_1, K_2\}$, maka

$$\left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| < \varepsilon \quad \text{untuk semua } n \geq K(\varepsilon).$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $\lim \left(\frac{1}{z_n} \right) = \frac{1}{z}$ atau $\left(\frac{1}{z_n} \right)$ konvergen ke $\frac{1}{z}$. Menggunakan Teorema 2.2.3(ii) dan dengan mengambil Y sebagai barisan $\left(\frac{1}{z_n} \right)$, maka $X \cdot Y = \left(\frac{x_n}{z_n} \right) \rightarrow x \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{x}{z}$. \square

Teorema 2.2.5. *Jika $X = (x_n)$ barisan bilangan real dengan $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan $(x_n) \rightarrow x$, maka $x \geq 0$.*

Bukti. Diambil $\varepsilon = -x > 0$. Karena $(x_n) \rightarrow x$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - x| < \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x - (-x) < x_n < x + (-x) \\ &\Leftrightarrow 2x < x_n < 0. \end{aligned}$$

Kontradiksi dengan pernyataan bahwa $x_n \geq 0$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah $x \geq 0$. \square

Teorema 2.2.6. *Jika $(x_n) \rightarrow x$, $(y_n) \rightarrow y$, dan $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $x \leq y$.*

Bukti. Diberikan $z_n = y_n - x_n$ sehingga $Z = (z_n) = Y - X$ dan $z_n \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Menggunakan Teorema 2.2.5 dan 2.2.3 diperoleh bahwa

$$0 \leq \lim Z = \lim(y_n) - \lim(x_n) \text{ atau } \lim(x_n) \leq \lim(y_n).$$

Jadi, terbukti bahwa $x \leq y$. □

Teorema 2.2.7. *Jika $X = (x_n)$ konvergen ke x dan jika $a \leq x_n \leq b$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $a \leq x \leq b$.*

Bukti. Diberikan Y barisan konstan (b, b, b, \dots) . Menggunakan Teorema 2.2.6 diperoleh bahwa $\lim X \leq \lim Y = b$. Dengan cara yang sama diperoleh $a \leq \lim X$. Jadi, terbukti bahwa $a \leq \lim X \leq b$ atau $a \leq x \leq b$. □

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang menyatakan bahwa jika suatu barisan Y berada (terselip) di antara dua barisan yang konvergen ke titik yang sama, maka Y juga konvergen ke titik yang sama.

Teorema 2.2.8. (Squeeze Theorem) *Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$, dan $Z = (z_n)$ sedemikian hingga*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \text{untuk semua } n \in \mathbb{N},$$

dan $\lim(x_n) = \lim(z_n)$. Maka Y konvergen dan

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n).$$

Bukti. Misalkan $w := \lim(x_n) = \lim(z_n)$. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - w| < \varepsilon$ dan $|z_n - w| < \varepsilon$, atau dengan kata lain $-\varepsilon < x_n - w < \varepsilon$ dan $-\varepsilon < z_n - w < \varepsilon$. Karena $x_n \leq y_n \leq z_n$, maka

$$x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w.$$

Akibatnya diperoleh bahwa $-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon$. Karena berlaku untuk semua $n \geq K$ dan $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $\lim(y_n) = w$. □

Teorema 2.2.9. Jika $X = (x_n) \rightarrow x$, maka $|X| = (|x_n|) \rightarrow |x|$.

Bukti. Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $X = (x_n) \rightarrow x$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Menggunakan akibat Ketaksamaan Segitiga, diperoleh bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\left| |x_n| - |x| \right| \leq |x_n - x| < \varepsilon.$$

Jadi, diperoleh bahwa $|x_n| - |x| < \varepsilon$, atau $|X| = (|x_n|) \rightarrow |x|$. \square

Teorema 2.2.10. Jika $X = (x_n) \rightarrow x$ dan $x_n \geq 0$, maka barisan bilangan real positif $(\sqrt{x_n}) \rightarrow \sqrt{x}$.

Bukti. Menurut Teorema 2.2.5 diperoleh bahwa $x \geq 0$. Akan ditunjukkan bahwa teorema benar untuk $x = 0$ dan $x > 0$.

Kasus I: Jika $x = 0$, diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $(x_n) \rightarrow x = 0$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$0 \leq x_n = x_n - 0 < \varepsilon^2.$$

Sehingga diperoleh bahwa $0 \leq \sqrt{x_n} < \varepsilon$. Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $(\sqrt{x_n}) \rightarrow \sqrt{x}$.

Kasus II: Jika $x > 0$, maka $\sqrt{x} > 0$. Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Perhatikan bahwa

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}.$$

Karena $\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$, maka diperoleh

$$\left| \sqrt{x_n} - \sqrt{x} \right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}.$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $(\sqrt{x_n}) \rightarrow \sqrt{x}$. \square

Teorema 2.2.11. Jika (x_n) barisan bilangan real (tegas) dengan $\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$ (ada) dan $L < 1$, maka (x_n) konvergen dan $\lim(x_n) = 0$.

Bukti. Dipilih $r \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $L < r < 1$. Diambil $\varepsilon = r - L > 0$. Karena $\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < \varepsilon. \text{ Karena}$$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - |L| \leq \left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right|,$$

maka

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - |L| < \varepsilon.$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - L < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < \varepsilon + L < L + r - L = r \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n r,$$

Jadi, untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < x_{n-2} r^3 < \dots < x_k r^{n+1-k} = \frac{x_k}{r^k} r^{n+1}.$$

Jika diambil $c = \frac{x_k}{r^k}$, maka diperoleh

$$0 < x_{n+1} < c r^{n+1} \quad \text{untuk semua } n \geq K.$$

Mengingat bahwa $\lim(r^n) = 0$ (sebab $0 < r < 1$), maka

$$\lim(r^n) = 0 \Rightarrow \lim(r^{n+1}) = 0 \Rightarrow \lim(x_{n+1}) = 0 \Rightarrow \lim(x_n) = 0.$$

Jadi, terbukti bahwa (x_n) konvergen dan $\lim(x_n) = 0$. □

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.2.

1. Tentukan apakah barisan berikut konvergen atau divergen.

(a) $x_n := \frac{n^2}{n+1}$. (b) $x_n := \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$.

(c) $x_n := \frac{(-1)^n n}{n+1}$

2. Tunjukkan bahwa jika X dan Y barisan bilangan real sedemikian hingga X dan $X+Y$ konvergen, maka Y konvergen.
3. Tunjukkan bahwa barisan $\left((-1)^n n^2\right)$ tidak konvergen.
4. Diberikan $y_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (y_n) dan $(\sqrt{n}y_n)$ konvergen. Carilah nilai limitnya.
5. Jika $a > 0$, $b > 0$, tunjukkan bahwa $\lim\left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right) = \frac{a+b}{2}$.
6. Gunakan Teorema Squeeze (2.2.8) untuk menentukan limit barisan berikut.

(a) $\left(n^{1/n}\right)$. (b) $\left((n!)^{1/n^2}\right)$.

7. Berilah sebuah contoh barisan konvergen (x_n) dengan $\lim\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = 1$.
8. Diberikan barisan bilangan real positif $X = (x_n)$ dengan $\lim\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = L > 1$.
Tunjukkan bahwa X tidak terbatas dan tidak konvergen.
9. Diberikan (x_n) barisan konvergen dan (y_n) sedemikian hingga untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $M \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq M$ berlaku $|x_n - y_n| < \varepsilon$. Apakah (y_n) konvergen?
10. Tunjukkan bahwa jika (x_n) dan (y_n) barisan konvergen, maka barisan (u_n) dan (v_n) yang didefinisikan dengan $u_n := \max\{x_n, y_n\}$ dan $v_n := \min\{x_n, y_n\}$ konvergen.

2.3. Barisan Monoton

Berikut ini diberikan pengertian mengenai barisan naik dan turun monoton.

Definisi 2.3.1. Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$.

- (i) Barisan X dikatakan **naik** (*increasing*) jika $x_n \leq x_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Barisan X dikatakan **naik tegas** (*strictly increasing*) jika $x_n < x_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) Barisan X dikatakan **turun** (*decreasing*) jika $x_n \geq x_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.
- (iv) Barisan X dikatakan **turun tegas** (*strictly decreasing*) jika $x_n > x_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.3.2. Barisan $X = (x_n)$ dikatakan **monoton** jika berlaku salah satu X naik atau X turun.

Contoh 2.3.3.

- (a) Barisan berikut ini naik (monoton).
 - (i) $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$.
 - (ii) $(1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots)$.
 - (iii) $(a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^n, \dots)$ jika $a > 1$.
- (b) Barisan berikut ini turun (monoton).
 - (i) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$.
 - (ii) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right)$.
 - (iii) $(b, b^2, b^3, b^4, \dots, b^n, \dots)$ jika $0 < b < 1$.
- (c) Barisan berikut ini tidak monoton.
 - (i) $(+1, -1, +1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots)$.
 - (ii) $(-1, +2, -3, +4, \dots)$.

2.3.4. Teorema Konvergensi Monoton

- (a) Jika $X = (x_n)$ naik (monoton) dan terbatas ke atas, maka $X = (x_n)$ konvergen dengan

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

- (b) Jika $X = (x_n)$ turun (monoton) dan terbatas ke bawah, maka $X = (x_n)$ konvergen dengan

$$\lim(x_n) = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Bukti.

- (a) Karena $X = (x_n)$ terbatas ke atas, maka terdapat $M \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x_n \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Namakan $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, maka $A \subset \mathbb{R}$, terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut Sifat Lengkap \mathbb{R} , maka supremum A ada, namakan $x = \sup A$. Diambil $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x - \varepsilon < x_k \leq x$. Karena X naik monoton, maka untuk $n \geq K$ berlaku

$$x - \varepsilon < x_k \leq x_n \leq x < x + \varepsilon$$

atau

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Jadi, terbukti bahwa $X = (x_n)$ konvergen ke $x = \lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

- (b) Gunakan cara yang hampir sama dengan pembuktian (a). □

Contoh 2.3.5. Diketahui barisan (y_n) dengan $y_1 = 1$ dan $y_{n+1} = \sqrt{2 + y_n}$, $n \geq 1$. Apakah (y_n) konvergen? Jika ya, tentukan $\lim(y_n)$.

Jawab. Akan ditunjukkan menggunakan induksi bahwa (y_n) naik monoton.

Untuk $n = 1$, diperoleh $y_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \geq 1$ (benar). Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu

$y_{k+1} = \sqrt{2 + y_k}$, $y_{k+1} \geq y_k$. Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$, yaitu

$$y_{k+2} = \sqrt{2 + y_{k+1}} \geq \sqrt{2 + y_k} = y_{k+1}.$$

Berarti benar untuk $n = k + 1$. Jadi, menurut induksi (y_n) naik monoton. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa (y_n) terbatas ke atas (oleh 3), yaitu $y_n \leq 3$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Untuk $n = 1$ benar, sebab $y_1 = 1 \leq 3$. Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $y_k \leq 3$. Maka $y_{k+1} = \sqrt{2 + y_k} \leq \sqrt{2 + 3} = \sqrt{5} \leq 3$ yang berarti benar untuk $n = k + 1$. Jadi, menurut induksi terbukti bahwa $y_n \leq 3$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Karena (y_n) naik monoton dan terbatas ke atas, maka menurut Teorema 2.3.4 barisan (y_n) konvergen. Misalkan $y = \lim(y_n)$, maka diperoleh

$$y = \sqrt{2 + y} \Leftrightarrow y^2 = 2 + y \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(y + 1) = 0.$$

Diperoleh $y = 2$ atau $y = -1$. Untuk $y = -1$ jelas tidak mungkin, sebab $1 \leq y_n \leq 3$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jadi, terbukti bahwa (y_n) konvergen dan $\lim(y_n) = 2$.

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.3

1. Diberikan $x_1 > 1$ dan $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) terbatas dan monoton. Carilah nilai limitnya.
2. Diberikan $x_1 \geq 2$ dan $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) turun dan terbatas ke bawah oleh 2. Carilah nilai limitnya.
3. Diberikan $A \subset \mathbb{R}$ tak berhingga yang terbatas ke atas dan misalkan $u := \sup A$. Tunjukkan bahwa terdapat barisan naik (x_n) dengan $x_n \in A$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $u = \lim(x_n)$.
4. Tentukan apakah barisan (y_n) konvergen atau divergen, dengan

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{untuk } n \in \mathbb{N}.$$

5. Diberikan $x_n := \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa (x_n) naik dan terbatas, sehingga (x_n) konvergen. (Petunjuk: Jika $k \geq 2$, maka $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$).
6. Tentukan konvergensi dan hitunglah limit barisan berikut.
- (a) $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right)$ (b) $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \right)$
- (c) $\left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \right)$ (d) $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right)$

2.4. Barisan Bagian

Pada bagian ini akan diberikan konsep barisan bagian (*subsequences*) dari suatu barisan bilangan real.

Definisi 2.4.1. Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$ dan diberikan barisan bilangan asli naik tegas $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Barisan $X' = (x_{n_k})$ dengan

$$(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$$

disebut dengan **barisan bagian** atau **sub barisan** (*subsequences*) dari X .

Contoh 2.4.2. Diberikan $X := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right)$.

- (i) Barisan $X'_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots \right)$ merupakan barisan bagian dari X .
- (ii) Barisan $X'_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots \right)$ merupakan barisan bagian dari X .
- (iii) Barisan $X'_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right)$ bukan barisan bagian dari X , sebab $n_2 < n_1$.

Teorema 2.4.3. Jika $X = (x_n)$ konvergen ke x , maka setiap barisan bagian $X' = (x_{n_k})$ dari X juga konvergen ke x .

Bukti. Diambil $\varepsilon > 0$. Karena $(x_n) \rightarrow x$, maka terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Karena untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $n_{k+1} \geq n_k$, maka untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $n_k \geq k \geq K(\varepsilon)$. Sehingga

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon.$$

Terbukti bahwa $X' = (x_{n_k})$ konvergen ke x . □

Teorema 2.4.4. Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$, maka pernyataan berikut ini ekuivalen.

- (i) Barisan $X = (x_n)$ tidak konvergen ke $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Ada $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian hingga untuk sebarang $k \in \mathbb{N}$, terdapat $n_k \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n_k \geq k$ dan $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$.
- (iii) Ada $\varepsilon_0 > 0$ dan suatu barisan bagian $X' = (x_{n_k})$ sedemikian hingga $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$.

Bukti.

(i) \Rightarrow (ii) Jika (x_n) tidak konvergen ke x , maka untuk suatu $\varepsilon_0 > 0$ tidak mungkin ditemukan $k \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n_k \geq k$ berlaku $|x_{n_k} - x| < \varepsilon_0$. Akibatnya tidak benar bahwa untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon_0$. Dengan kata lain, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ terdapat $n_k \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n_k \geq k$ dan $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$.

(ii) \Rightarrow (iii) Diberikan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga memenuhi (ii) dan diberikan $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n_1 \geq 1$ dan $|x_{n_1} - x| \geq \varepsilon_0$. Selanjutnya, diberikan $n_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n_2 > n_1$ dan $|x_{n_2} - x| \geq \varepsilon_0$. Demikian seterusnya sehingga diperoleh suatu barisan bagian $X' = (x_{n_k})$ sehingga berlaku $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$.

(iii) \Rightarrow (i) Misalkan $X = (x_n)$ mempunyai barisan bagian $X' = (x_{n_k})$ yang memenuhi sifat (iii). Maka X tidak konvergen ke x , sebab jika konvergen ke x , maka $X' = (x_{n_k})$ juga konvergen ke x . Hal ini tidak mungkin, sebab $X' = (x_{n_k})$ tidak berada dalam persekitaran $V_{\varepsilon_0}(x)$. \square

Teorema 2.4.5. (Kriteria Divergensi) *Jika barisan bilangan real $X = (x_n)$ memenuhi salah satu dari sifat berikut, maka barisan X divergen.*

- (i) X mempunyai dua barisan bagian konvergen $X' = (x_{n_k})$ dan $X'' = (x_{m_k})$ dengan limit keduanya tidak sama.
- (ii) X tidak terbatas.

Contoh 2.4.6. Tunjukkan bahwa barisan $\left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots\right)$ divergen.

Jawab. Namakan barisan di atas dengan $Y = (y_n)$, dengan $y_n = \frac{1}{n}$ jika n genap, dan $y_n = n$ jika n ganjil. Jelas bahwa Y tidak terbatas. Jadi, barisan $Y = (y_n)$ divergen.

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang menyatakan bahwa barisan bilangan real $X = (x_n)$ pasti mempunyai barisan bagian yang monoton. Untuk membuktikan teorema ini, diberikan pengertian puncak (*peak*), x_m disebut puncak jika $x_m \geq x_n$ untuk semua n sedemikian hingga $n \geq m$. Titik x_m tidak pernah didahului oleh sebarang

elemen barisan setelahnya. Perhatikan bahwa pada barisan yang menurun, setiap elemen adalah puncak, tetapi pada barisan yang naik, tidak ada elemen yang menjadi puncak.

2.4.7. Teorema Barisan Bagian Monoton *Jika $X = (x_n)$ barisan bilangan real, maka terdapat barisan bagian dari X yang monoton.*

Bukti. Pembuktian dibagi menjadi dua kasus, yaitu X mempunyai tak hingga banyak puncak, dan X mempunyai berhingga banyak puncak.

Kasus I: X mempunyai tak hingga banyak puncak. Tulis semua puncak berurutan naik, yaitu $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_n}, \dots$. Maka $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \dots \geq x_{m_n}, \dots$. Oleh karena itu, (x_{m_n}) merupakan barisan bagian yang turun (monoton).

Kasus II: X mempunyai berhingga banyak puncak. Tulis semua puncak berurutan naik, yaitu $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_r}$. Misalkan $s_1 := m_r + 1$ adalah indeks pertama dari puncak yang terakhir. Karena x_{s_1} bukan puncak, maka terdapat $s_2 > s_1$ sedemikian hingga $x_{s_1} < x_{s_2}$. Karena x_{s_2} bukan puncak, maka terdapat $s_3 > s_2$ sedemikian hingga $x_{s_2} < x_{s_3}$. Jika proses ini diteruskan, diperoleh barisan bagian (x_{s_n}) yang naik (monoton). \square

Teorema 2.4.8. (Bolzano-Weierstrass) *Setiap barisan bilangan real yang terbatas pasti memuat barisan bagian yang konvergen.*

Bukti. Diberikan barisan bilangan real terbatas $X = (x_n)$. Namakan $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ range barisan, maka S mungkin berhingga atau tak berhingga.

Kasus I: Diketahui S berhingga. Misalkan $S = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$, maka terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan $1 \leq m \leq t$ dan barisan $(r_k : k \in \mathbb{N})$ dengan $r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ sehingga $x_{r_1} = x_{r_2} = \dots = x_m$. Hal ini berarti terdapat barisan bagian $(x_{r_k} : k \in \mathbb{N})$ yang konvergen ke x_m .

Kasus II: Karena S tak berhingga dan terbatas, maka S mempunyai titik cluster atau titik limit, namakan x titik limit S . Misalkan $U_k = \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$ persekitaran titik x .

Untuk $k = 1$, maka terdapat $x_1 \in S \cap U_1$, $x_1 \neq x$ sedemikian hingga $|x_1 - x| < 1$.

Untuk $k = 2$, maka terdapat $x_2 \in S \cap U_2$, $x_2 \neq x$ sedemikian hingga $|x_2 - x| < \frac{1}{2}$.

Untuk $k = 3$, maka terdapat $x_3 \in S \cap U_3$, $x_3 \neq x$ sedemikian hingga $|x_3 - x| < \frac{1}{3}$.

Demikian seterusnya, sehingga diperoleh:

Untuk $k = n$, maka terdapat $x_n \in S \cap U_n$, $x_n \neq x$ sedemikian hingga $|x_n - x| < \frac{1}{n}$.

Ambil $\varepsilon > 0$. Menurut Sifat Archimedes, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Maka untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$. Terbukti bahwa (x_n) konvergen ke x dengan (x_n) barisan bagian (x_n) . \square

Teorema 2.4.9. *Diberikan barisan bilangan real terbatas $X = (x_n)$ dan diberikan $x \in \mathbb{R}$ yang mempunyai sifat bahwa setiap barisan bagian dari X konvergen ke x . Maka barisan X konvergen ke x .*

Bukti. Misalkan $M > 0$ adalah batas dari barisan X sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Andaikan X tidak konvergen ke x , maka menggunakan Teorema 2.4.4 terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan barisan bagian $X' = (x_{n_k})$ sedemikian hingga $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Karena X' barisan bagian dari X , maka M juga batas dari X' . Menggunakan Teorema Bolzano-Weierstrass berakibat bahwa X' memuat barisan bagian X'' . Karena X'' juga barisan bagian dari X , maka X'' juga konvergen ke x . Dengan demikian, akan selalu berada dalam persekitaran $V_{\varepsilon_0}(x)$. Timbul kontradiksi, yang benar adalah X selalu konvergen ke x . \square

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.4.

1. Tunjukkan bahwa barisan berikut ini divergen.

(a) $\left(1 - (-1)^n + \frac{1}{n}\right)$. (b) $\left(\sin \frac{n\pi}{4}\right)$.

2. Berikan contoh barisan tak terbatas yang memuat barisan bagian konvergen.
3. Diberikan barisan $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$. Diberikan barisan $Z = (z_n)$ dengan definisi $z_1 := x_1$, $z_2 := y_1$, ..., $z_{2n-1} := x_n$, $z_{2n} := y_n$. Tunjukkan bahwa Z konvergen jika dan hanya jika X dan Y konvergen dan $\lim(x_n) = \lim(y_n)$.

4. Tentukan konvergensi dan limit barisan berikut.

(a) $\left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2\right)$. (b) $\left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}\right)$.

5. Hitunglah limit barisan berikut.

(a) $\left((3n)^{\frac{1}{2n}}\right)$. (b) $\left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n}\right)$.

6. Misalkan setiap barisan bagian dari $X = (x_n)$ mempunyai suatu barisan bagian yang konvergen ke 0. Tunjukkan bahwa $\lim(x_n) = 0$.

7. Diberikan barisan terbatas (x_n) dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ diberikan $s_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$ dan $S := \inf\{s_n\}$. Tunjukkan bahwa terdapat barisan bagian dari (x_n) yang konvergen ke S .

8. Jika $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan $\lim((-1)^n x_n)$ ada, tunjukkan (x_n) konvergen.

9. Tunjukkan bahwa jika (x_n) terbatas, maka terdapat barisan bagian (x_{n_k})

sedemikian hingga $\lim\left(\frac{1}{x_{n_k}}\right) = 0$.

10. Diberikan barisan terbatas (x_n) dan $s := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tunjukkan bahwa jika $s \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, maka terdapat barisan bagian dari (x_n) yang konvergen ke s .

2.5. Barisan Cauchy

Definisi 2.5.1. Barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut **barisan Cauchy** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n, m \geq H(\varepsilon)$, berlaku $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Contoh 2.5.2. Barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $H = H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $H > \frac{2}{\varepsilon}$. Maka

jika $n, m \geq H$, diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan dengan cara yang sama diperoleh $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Oleh karena itu, jika $n, m \geq H(\varepsilon)$, maka

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Lemma 2.5.3. Jika $X = (x_n)$ barisan bilangan real yang konvergen, maka X merupakan barisan Cauchy.

Bukti. Misalkan $x = \lim X$. Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $n \geq K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu, jika $H(\varepsilon) = K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ dan jika $n, m \geq H(\varepsilon)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x) + (x - x_m)| \\ &= |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa (x_n) barisan Cauchy. \square

Lemma 2.5.4. *Jika $X = (x_n)$ barisan Cauchy, maka X terbatas.*

Bukti. Diketahui $X = (x_n)$ barisan Cauchy. Diberikan $\varepsilon = 1$. Jika $H := H(1)$ dan $n \geq H$, maka $|x_n - x_H| < 1$. Selanjutnya, menggunakan Ketaksamaan Segitiga, diperoleh $|x_n| \leq |x_H| + 1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Namakan

$$M := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{H-1}|, |x_H| + 1\},$$

maka diperoleh $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jadi, terbukti bahwa X terbatas. \square

Teorema 2.5.5. (Kriteria Konvergensi Cauchy) *Barisan bilangan real $X = (x_n)$ konvergen jika dan hanya jika $X = (x_n)$ barisan Cauchy.*

Bukti.

\Rightarrow Jelas (Lemma 2.5.3).

\Leftarrow Diketahui $X = (x_n)$ barisan Cauchy. Diambil $\varepsilon > 0$, maka terdapat $H = H(\varepsilon) > 0$

sedemikian hingga untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n, m \geq H$ berlaku $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Karena X barisan Cauchy, maka X terbatas, sehingga X memuat barisan bagian

$X' = (x_{n_k})$ yang konvergen ke x^* . Oleh karena itu, terdapat $K \geq H$ dengan

$K \in \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ sedemikian hingga $|x_K - x^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Akibatnya untuk $m = K$ diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |x_n - x_K + x_K - x^*| \\ &\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa barisan $X = (x_n)$ konvergen. \square

Definisi 2.5.6. Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan **kontraktif** (*contractive*) jika terdapat konstanta C , dengan $0 < C < 1$ sedemikian hingga

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C |x_{n+1} - x_n|$$

untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Bilangan C disebut **konstan** dari barisan kontraktif.

Teorema 2.5.7. *Setiap barisan kontraktif merupakan barisan Cauchy, dan konvergen.*

Akibat 2.5.8. *Jika $X = (x_n)$ barisan kontraktif dengan konstan C , $0 < C < 1$, dan jika $x^* = \lim X$, maka*

$$(i) \quad |x^* - x_n| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C} |x_2 - x_1|,$$

$$(ii) \quad |x^* - x_n| \leq \frac{C}{1-C} |x_n - x_{n-1}|.$$

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.5.

- Berikan sebuah contoh barisan terbatas yang bukan barisan Cauchy.
- Tunjukkan menggunakan definisi bahwa barisan berikut merupakan barisan Cauchy.

$$(a) \left(\frac{n+1}{n} \right). \quad (b) \left(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right).$$

- Tunjukkan menggunakan definisi bahwa barisan berikut bukan barisan Cauchy.

$$(a) \left((-1)^n \right) \quad (b) \left(n + \frac{(-1)^n}{n} \right) \quad (c) (\ln n)$$

- Diberikan barisan (x_n) dengan $x_n := \sqrt{n}$, tunjukkan bahwa $\lim |x_{n+1} - x_n| = 0$, tetapi bukan barisan Cauchy.
- Diberikan barisan Cauchy (x_n) sedemikian hingga $x_n \in \mathbb{Z}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) selalu konstan.

6. Jika $0 < r < 1$ dan $|x_{n+1} - x_n| < r^n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, tunjukkan bahwa (x_n) merupakan barisan Cauchy.
7. Jika $y_1 < y_2$ adalah sebarang bilangan real dan $y_n = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2}$ untuk $n > 2$, tunjukkan bahwa (y_n) konvergen. Tentukan limitnya.
8. Jika $x_1 > 0$ dan $x_{n+1} = (2 + x_n)^{-1}$ untuk $n \geq 1$, tunjukkan bahwa (x_n) merupakan barisan kontraktif. Tentukan limitnya.

2.6. Sifat Barisan Divergen

Pada subbab ini diberikan beberapa sifat dari suatu barisan bilangan real (x_n) yang mendekati atau menuju ke $\pm\infty$, yaitu $\lim(x_n) = +\infty$ dan $\lim(x_n) = -\infty$. Ingat bahwa barisan divergen adalah barisan yang tidak konvergen.

Definisi 2.6.1. Diberikan barisan bilangan real (x_n) .

- (i) Barisan (x_n) dikatakan **mendekati** $+\infty$, ditulis $\lim(x_n) = +\infty$, jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ terdapat $K(\alpha) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\alpha)$, maka $x_n > \alpha$.
- (ii) Barisan (x_n) dikatakan **mendekati** $-\infty$, ditulis $\lim(x_n) = -\infty$, jika untuk setiap $\beta \in \mathbb{R}$ terdapat $K(\beta) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\beta)$, maka $x_n < \beta$.

Barisan (x_n) dikatakan **divergen proper** (tepat/tegas) jika $\lim(x_n) = +\infty$ atau $\lim(x_n) = -\infty$. Berikut ini diberikan contoh bahwa $\lim(n^2) = +\infty$.

Contoh 2.6.2. $\lim(n^2) = +\infty$. Jika $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $K(\alpha) > \alpha$, dan jika $n \geq K(\alpha)$, maka diperoleh $n^2 \geq n > \alpha$.

Teorema 2.6.3. *Barisan bilangan real monoton merupakan barisan divergen proper jika dan hanya jika barisannya tidak terbatas.*

(a) Jika (x_n) barisan naik tak terbatas, maka $\lim(x_n) = +\infty$.

(b) Jika (x_n) barisan turun tak terbatas, maka $\lim(x_n) = -\infty$.

Bukti.

(a) Misalkan (x_n) barisan naik. Jika (x_n) terbatas, maka (x_n) konvergen. Jika (x_n) tidak terbatas, maka untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ terdapat $n(\alpha) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\alpha < x_{n(\alpha)}$. Tetapi karena (x_n) naik, diperoleh $\alpha < x_n$ untuk semua $n \geq n(\alpha)$. Karena α sebarang, maka diperoleh bahwa $\lim(x_n) = +\infty$.

(b) Bukti hampir sama dengan (a). □

Teorema 2.6.4. *Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n) , dengan $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Jika $\lim(x_n) = +\infty$, maka $\lim(y_n) = +\infty$.

(b) Jika $\lim(y_n) = -\infty$, maka $\lim(x_n) = -\infty$.

Bukti.

(a) Jika $\lim(x_n) = +\infty$ dan jika diberikan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka terdapat $K(\alpha) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\alpha)$, maka $\alpha < x_n$. Karena diketahui $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $\alpha < y_n$ untuk semua $n \geq K(\alpha)$. Karena α sebarang, maka $\lim(y_n) = +\infty$.

(b) Bukti hampir sama dengan (a). □

Teorema 2.6.5. Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n) , dan untuk suatu $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ diperoleh

$$\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = L.$$

Maka $\lim(x_n) = +\infty$ jika dan hanya jika $\lim(y_n) = +\infty$.

Bukti. Diketahui $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = L$, artinya terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$\frac{1}{2}L < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}L.$$

Oleh karena itu, diperoleh $\left(\frac{1}{2}L\right)y_n < x_n < \left(\frac{3}{2}L\right)y_n$ untuk semua $n \geq K$. Sehingga menggunakan Teorema 2.6.4, teorema terbukti. \square

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.6

1. Tunjukkan bahwa jika (x_n) barisan tak terbatas, maka (x_n) memuat barisan bagian yang divergen proper.
2. Tunjukkan bahwa jika $x_n > 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $\lim(x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim \left(\frac{1}{x_n} \right) = +\infty$.
3. Tentukan apakah barisan berikut ini divergen proper.

(a) (\sqrt{n}) .	(b) $(\sqrt{n+1})$.
(c) $(\sqrt{n-1})$.	(d) $\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}} \right)$.
4. Diberikan (x_n) barisan divergen proper dan diberikan (y_n) sedemikian hingga $\lim(x_n y_n) \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa (y_n) konvergen ke 0.

5. Tentukan apakah barisan berikut ini konvergen atau divergen.

(a) $\left(\sqrt{n^2 + 2}\right)$. (b) $\left(\frac{\sqrt{n}}{(n^2 + 1)}\right)$.

(c) $\left(\frac{(n^2 + 1)}{\sqrt{n}}\right)$. (d) $\left(\sin \sqrt{n}\right)$.

6. Tunjukkan bahwa jika $\lim\left(\frac{a_n}{n}\right) = L$, dengan $L > 0$, maka $\lim(a_n) = +\infty$.

2.7. Deret Tak Berhingga

Berikut ini diberikan pengantar singkat mengenai suatu deret tak berhingga dari bilangan real.

Definisi 2.7.1. Jika $X = (x_n)$ barisan di \mathbb{R} , maka **deret tak berhingga** (cukup disebut **deret**) yang dibentuk oleh X adalah barisan $S = (s_k)$ yang didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} s_1 &:= x_1 \\ s_2 &:= s_1 + x_2 && (= x_1 + x_2) \\ &\dots \\ s_k &:= s_{k-1} + x_k && (= x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\ &\dots \end{aligned}$$

x_n disebut dengan *terms* dari deret, dan s_k disebut **jumlahan parsial** (*partial sum*). Jika $\lim S$ ada, maka deret S dikatakan **konvergen** dan nilai limitnya adalah hasil dari jumlahan deret. Jika limitnya tidak ada, maka dikatakan deret S **divergen**.

Deret tak berhingga S yang dibangun oleh barisan $X = (x_n)$ disimbolkan dengan

$$\sum(x_n) \quad \text{atau} \quad \sum x_n \quad \text{atau} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Contoh 2.7.2.

Diberikan barisan $X := (r^n)_{n=0}^{\infty}$ dengan $r \in \mathbb{R}$ yang membangun deret:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$$

Akan ditunjukkan bahwa jika $|r| < 1$, maka deret ini konvergen ke $\frac{1}{(1-r)}$.

Misalkan $s_n := 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$ untuk $n \geq 0$, dan jika s_n dikalikan dengan r dan mengurangkan hasilnya dari s_n , maka diperoleh

$$s_n(1-r) = 1 - r^{n+1}.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$s_n - \frac{1}{1-r} = -\frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Sehingga

$$\left| s_n - \frac{1}{1-r} \right| \leq \frac{|r|^{n+1}}{|1-r|}.$$

Karena $|r|^{n+1} \rightarrow 0$ saat $|r| < 1$, maka deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ konvergen ke $\frac{1}{(1-r)}$ saat $|r| < 1$.

Selanjutnya, diberikan kondisi-kondisi yang dapat memberikan jaminan bahwa suatu deret itu konvergen.

Teorema 2.7.3. (The n th Term Test) *Jika deret $\sum x_n$ konvergen, maka $\lim(x_n) = 0$.*

Bukti. Menggunakan Definisi 2.7.1, $\sum x_n$ konvergen apabila $\lim(s_k)$ ada. Karena $x_n = s_n - s_{n-1}$, maka $\lim(x_n) = \lim(s_n) - \lim(s_{n-1}) = 0$. □

Teorema 2.7.4. (Kriteria Cauchy) Deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $m > n \geq M(\varepsilon)$, maka

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m| < \varepsilon.$$

Teorema 2.7.5. Diberikan (x_n) barisan bilangan real nonnegatif. Maka deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika barisan $S = (s_k)$ dari jumlahan parsialnya terbatas. Dalam hal ini,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim(s_k) = \sup\{s_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Bukti. Karena $x_n > 0$, maka barisan jumlahan parsial S naik monoton, yaitu

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k \leq \dots$$

Menggunakan Teorema 2.3.4, barisan $S = (s_k)$ konvergen jika dan hanya jika barisannya terbatas, dalam hal ini limitnya sama dengan $\sup\{s_k\}$. \square

Contoh 2.7.6. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen.

Karena jumlahan parsialnya monoton, maka cukup ditunjukkan bahwa barisan bagian (s_k) terbatas. Jika $k_1 := 2^1 - 1 = 1$, maka $s_{k_1} = 1$. Jika $k_2 := 2^2 - 1 = 3$, maka

$$s_{k_2} = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) < 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2},$$

dan jika $k_3 := 2^3 - 1 = 7$, maka diperoleh

$$s_{k_3} = s_{k_2} + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Menggunakan induksi matematik, diperoleh bahwa jika $k_j := 2^j - 1$, maka

$$0 < s_{k_j} < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}.$$

Karena ruas kanan merupakan jumlahan parsial dari deret geometri dengan $r = \frac{1}{2}$, maka

$$\lim(s_k) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 2. \text{ Jadi, deret } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergen.}$$

2.7.7. Tes Perbandingan (Comparison Tests) Diberikan barisan bilangan real $X := (x_n)$ dan $Y := (y_n)$, dan misalkan untuk suatu $K \in \mathbb{N}$ berlaku

$$0 \leq x_n \leq y_n \quad \text{untuk } n \geq K.$$

- (a) Jika $\sum y_n$ konvergen, maka $\sum x_n$ konvergen.
(b) Jika $\sum x_n$ divergen, maka $\sum y_n$ divergen.

Bukti.

- (a) Misalkan $\sum y_n$ konvergen. Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $m > n \geq M(\varepsilon)$, maka

$$y_{n+1} + \dots + y_m < \varepsilon.$$

Jika $m > \max\{K, M(\varepsilon)\}$, maka diperoleh bahwa

$$0 \leq x_{n+1} + \dots + x_m \leq y_{n+1} + \dots + y_m < \varepsilon,$$

yang berakibat bahwa $\sum x_n$ konvergen.

- (b) Menggunakan kontraposisi dari (a), maka teorema terbukti. □

2.7.8. Tes Perbandingan Limit Misalkan $X := (x_n)$ barisan positif naik tegas dan misalkan limit berikut ada dalam \mathbb{R} , yaitu

$$r := \lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right).$$

- (a) Jika $r \neq 0$, maka $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika $\sum y_n$ konvergen.
(b) Jika $r = 0$, maka $\sum y_n$ konvergen jika dan hanya jika $\sum x_n$ konvergen.

Bukti.

(a) Diketahui $r := \lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right)$ dan dari soal latihan 2.1.10, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$

sedemikian hingga untuk $n \geq K$ berlaku $\frac{1}{2}r \leq \frac{x_n}{y_n} \leq 2r$, sehingga diperoleh

$$\left(\frac{1}{2}r \right) y_n \leq x_n \leq (2r) y_n.$$

Menggunakan Tes Perbandingan 2.7.7 dua kali, maka pernyataan (a) terbukti.

(b) Jika $r = 0$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk $n \geq K$ berlaku

$$0 < x_n \leq y_n.$$

Menggunakan Teorema 2.7.7 (a), maka pernyataan (b) terbukti. □

Contoh 2.7.9. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ konvergen.

Diketahui ketaksamaan berikut benar

$$0 < \frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{untuk } n \in \mathbb{N}.$$

Karena telah diketahui bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, maka menggunakan Tes

Perbandingan 2.7.7 diperoleh bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ konvergen.

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.7

1. Tunjukkan bahwa

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1.$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha} > 0$, jika $\alpha > 0$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$

2. Jika $\sum x_n$ dan $\sum y_n$ konvergen, tunjukkan bahwa $\sum (x_n + y_n)$ konvergen.
3. Berikan contoh deret konvergen $\sum x_n$ dan deret divergen $\sum y_n$ sedemikian hingga $\sum (x_n + y_n)$ konvergen. Jelaskan.
4. (a) Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ divergen.
 (b) Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ konvergen.
5. Jika $\sum a_n$ dengan $a_n > 0$ konvergen, maka apakah $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ juga konvergen? Tunjukkan atau beri contoh penyangkalnya jika tidak terbukti.
6. Jika deret $\sum a_n$, dengan $a_n > 0$ konvergen, dan jika $b_n = \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$, maka tunjukkan bahwa $\sum b_n$ divergen.
7. Tunjukkan bahwa jika $c > 0$, maka deret berikut ini konvergen.
 - (a) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^c}$.
 - (b) $\sum \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^c}$.

DAFTAR PUSTAKA

Apostol, T.M, 1974, *Mathematical Analysis*, Second Edition, Addison-Wiley, Massachusetts

Riyanto, Z. M. 2009. *Pengantar Analisis Real*. Universitas Gajah Mada. Jogjakarta.

Royden, H.L and Fitzpatrick, P.M. 2010. *Real Analysis*. China Machine Press. Hongkong.

USA. Bartle, R.G and Sherbert, D.R, 2000, *Introduction to Real Analysis*, Third Edition, John Wiley and Sons, Inc, USA